G. CIUCU ★ V. CRAIU ★ I. SĂCUIU

CULEGERE DE PROBLEME DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR

EDITURA TEHNICĂ ● BUCUREȘTI — 1967

Problemele cuprinse în această culegere, se referă la noțiunile de bază ale teoriei probabilităților și sînt menite să contribuie la înțelegerea mai profundă a acestei importante ramuri a matematicii și la aplicarea ei în diverse domenii de activitate.

Cartea cuprinde următoarele capitole: Evenimente, operații cu mulțimi, Cîmpuri de probabilitate, probabilități condiționate, probabilități geometrice, Funcții de repartiție, densități de repartiție, Valori medii, momente, Funcții caracteristice, funcții generatoare, Șiruri de variabile aleatoare, Convergente și Procese aleatoare.

În lucrare problemele sînt date gradat, pornind de la cele mai simple la probleme mai dificile și sînt rezolvate în întregime. Unele probleme au caracter teoretic, iar altele caracter aplicativ.

Lucrarea se adresează studenților din ultimii ani de la facultățile de matematică-mecanică, de la institutele politehnice, pedagogice, de la institutele de științe economice, cum și profesorilor de școli medii și elevilor din clasa a XII-a.

De asemenea, culegerea poate fi consultată și de toți economiștii, inginerii și tehnicienii interesați în aplicațiile teoriei probabilităților.

PREFAȚĂ

În etapa actuală de dezvoltare a științei, teoria probabilităților cunoaște o amplă și multilaterală dezvoltare, datorită aplicațiilor importante pe care le are în cele mai diverse domenii de activitate.

Pornind de la experiențe concrete, teoria probabilităților a dat conceptelor sale o formă riguros matematică, fiind capabilă să se întoarcă din nou la experiență pentru a interpreta întinse categorii de fenomene.

Fundamentarea riguros științifică a acestei teorii s-a făcut însă de-abia în anul 1933 de către matematicianul A. N. Kolmogorov, care a dat o definiție axiomatică și a legat noțiunea de probabilitate de teoria mulțimilor și a măsurii, de matematica modernă.

Într-o perioadă relativ scurtă, ea s-a transformat dintr-un simplu calcul al probabilităților de cîștig la jocurile de noroc într-o știință matură, bine închegată din punct de vedere logic și cu o largă aplicabilitate, transformîndu-se într-o știință teoretică, schimbîndu-și calitativ obiectul de cercetare. Primele aplicații efective ale teoriei probabilităților au fost legate de studii demografice și asigurări. Mai tîrziu dezvoltarea teoriei probabilităților s-a făcut sub impulsul problemelor puse de fizică, chimie și mai ales de științele tehnice.

Aceste științe, ca și altele, fac apel tot timpul la teoria probabilităților atunci cînd trebuie să interpreteze diverse rezultate experimentale sau înregistrări numerice, întrucît ea construiește modele abstracte, ale căror mecanisme teoretice duc la aceleași rezultate numerice ca și cele date de experiență.

Întrucît teoria probabilităților construiește variate modele abstracte care pot servi, cel puțin ca punct de plecare, pentru interpretarea diverselor fenomene reale, asistăm la întrepătrunderea cu alte științe cum sînt mecanica, economia, biologia, lingvistica etc., generînd domenii noi de cercetare : mecanica statistică, statistica economică, biologia matematică, lingvistica matematică etc. De asemenea asistăm la o puternică dezvoltare a teoriei probabilităților, constituindu-se noi ramuri cu importante aplicații în economie, cum sînt teoria siguranței, controlul calității producției, teoria așteptării, întreținerea și reînnoirea utilajelor, probleme de stocarea materialelor etc.

Noțiunile de entropie și cantitate de informație, fundamentale în cibernetică — se definesc de asemenea cu ajutorul reprezentărilor probabiliste.

Întrucît teoria probabilităților a permis fundamentarea riguroasă a legilor statistice, legi care caracterizează o mulțime de fenomene elaborînd numeroase modele abstracte, ea își găsește în prezent largi aplicații în studiul aspectelor cantitative ale legilor economice. Astfel problemele legate de planifi-

carea economiei naționale și de evidență statistică, analiza cantitativă a reproducției socialiste lărgite, întocmirea balanțelor inter-ramuri, planificarea producției în întreprinderi etc. sînt studiate astăzi utilizînd teoria probabilităților.

În culegerea de față sînt înserate numai probleme de teoria probabilităților — fără a conține exemple din statistica matematică. De asemenea sînt date aplicații în domeniile cele mai importante în care se utilizează pe scară din ce în ce mai largă metodele și modelele probabiliste. Totodată primele capitole ale culegerii vor putea fi folosite în școala medie deoarece în curînd teoria probabilităților va fi înglobată în planul de învățămînt al liceelor.

Capitolele culegerii sînt următoarele: evenimente, operații cu mulțimi, cîmpuri finite de probabilitate, funcții și densități de repartiție, valori medii și momente, legi limită, legea numerelor mari, convergența variabilelor aleatoare, funcție caracteristică și funcție generatoare și procese aleatoare.

Această nouă culegere este menită să constituie un îndreptar privind aplicațiile, pentru toți cei care studiază sau se interesează de teoria probabilităților.

AUTORII

TABLA DE MATERII

Cap. I. Evenimente. Operaţii cu mulţimi 9
Cap. II. Cîmpuri de probabilitate. Probabilităţi condiţionate. Probabilităţi geometrice 23
Cap. III. Funcţii de repartiţie. Densităţi de repartiţie 115
Cap. IV. Valori medii. Momente 199
Cap. V. Funcţii caracteristice. Funcţii generatoare 295
Cap. VI. Şiruri de variabile aleatoare. Convergenţe 366
§ 1. Legi limită. Legea numerelor mari 366
§ 2. Tipuri de convergenţă 388
Cap. VII. Procese aleatoare 435

I

EVENIMENTE. OPERAȚII CU MULȚIMI

1. *Dintre studenții prezenți la cursul de „Teoria probabilităților" se alege la întîmplare unul. Să notăm cu A evenimentul că studentul ales este băiat, cu B evenimentul că el nu fumează, iar cu C evenimentul că el locuiește în cămin. Se cere:*

a) *să se scrie evenimentul* $A \cap B \cap C^c$;

b) *în ce condiții are loc identitatea* $A \cap B \cap C = A$?

c) *cînd este adevărată relația* $C^c \subseteq B$?

d) *cînd va putea avea loc egalitatea* $A^c = B$?, *va avea loc dacă toți băieții fumează*?

SOLUȚIE. a) A fost ales un băiat care nu locuiește în cămin și care nu fumează.

b) Are loc identitatea $A \cap B \cap C = A$ cînd toți băieții locuiesc în cămin și nici unul nu fumează.

c) $C^c \subseteq B$ este adevărată cînd toți fumătorii locuiesc în cămin.

d) Are loc $A^c = B$ cînd nici o fată nu fumează, iar toți băieții fumează. Egalitatea nu are loc dacă fumează toți băieții, căci pot fuma și fetele.

2. *O țintă este formată din zece cercuri concentrice de rază* r_k $(k = 1, 2, \ldots, 10)$ cu $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$.

Evenimentul A_k *constă în nimerirea cercului de rază* r_k. *Să se explice ce înseamnă evenimentele:*

a) $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$;

b) $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$;

c) $D = A_5 \Delta A_6$;

d) $E = A_1^c \cap A_2$.

SOLUȚIE. a) Evenimentul B constă în nimerirea cercului de rază r_6.

b) Evenimentul C constă în nimerirea cercului de rază r_1.

c) Evenimentul D constă în nimerirea coroanei determinată de cercurile de rază r_5 și r_6.

d) Evenimentul E constă în nimerirea coroanei determinată de cercurile de rază r_1 și r_2.

3. *Un muncitor a lucrat n piese. Să notăm cu* A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *evenimentul care constă în faptul că cea de a i piesă lucrată este defectă. Să se scrie următoarele evenimente:*

a) *nici una dintre piesele lucrate nu este defectă*;

b) *cel puțin una dintre piesele lucrate este defectă*;
c) *numai una dintre piesele lucrate este defectă*;
d) *exact două piese sînt defecte*;
e) *cel puțin două piese nu sînt defecte*;
f) *cel mult două piese sînt defecte*;

SOLUȚIE. a) Dacă A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este evenimentul că cea de a i piesă este defectă atunci A_i^c $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este evenimentul că cea de a i piesă nu este defectă.

În felul acesta evenimentul „nici una dintre piesele lucrate nu este defectă" se poate scrie $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$.

b) Evenimentul „cel puțin una dintre piesele lucrate este defectă" se poate scrie $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

c) Evenimentul „numai una dintre piesele lucrate este defectă" se poate scrie

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c).$$

d) Evenimentul „exact două piese sînt defecte" se poate scrie

$$\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (A_1^c \cap \ldots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \cap A_{j+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c).$$

e) Evenimentul „cel puțin două piese nu sînt defecte" este complementarul evenimentului „cel mult o piesă este defectă" care se poate scrie

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_1^c \cap \ldots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c)\right].$$

f) Evenimentul „cel mult două piese sînt defecte" se compune din: sau „nici o piesă nu este defectă" sau „numai o piesă este defectă" sau „numai două piese sînt defecte".

Acest eveniment se poate scrie

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c)\right] \cup$$

$$\cup \left[\bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \cap A_{j+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c)\right].$$

4. *Fie A_n evenimentul care constă în faptul că la a n-a repetare a experienței $\mathcal{U}$ s-a realizat evenimentul A și $B_{n,m}$ evenimentul care constă în faptul că în primele n repetări ale experienței $\mathcal{U}$ s-a realizat evenimentul A de m ori.*

Se cere:
a) *să se exprime $B_{4,2}$ prin A_i*;
b) *să se explice sensul evenimentului* $B_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{m} B_{n,k}\right)$;

c) *să se decidă dacă sînt adevărate relațiile*:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq B^c \quad \text{și} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq B$$

unde $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$.

SOLUȚIE. a) Evenimentul $B_{4,2}$ înseamnă că în primele patru repetări ale experienței, s-a realizat de două ori evenimentul A. Acest lucru îl putem scrie astfel:

$$B_{4,2} = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c) \cup$$
$$\cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4) \cup$$
$$\cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4).$$

b) Sensul evenimentului $B_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{m} B_{n,k} \right)$ este următorul: la repetarea de o infinitate de ori a experienței $\mathcal{U}$, evenimentul A se realizează cel mult de m ori.

c) Se observă imediat, ținînd seama de definiția lui B că sînt adevărate relațiile

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq B^c \quad \text{și} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq B.$$

5. *Să se demonstreze următoarele egalități*:

a) $[(A \cup B) \cap (A \cup B^c)] \cup [(A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] = \Omega$;

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \Phi$;

c) $[(A \cap B) \cup (C \cap D)]^c = (A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)$;

d) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

e) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D) =$
$= (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D)$;

f) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

g) $(A - B) \cup C = [(A \cup C) - B] \cup (B \cap C)$;

h) $(A - B) - (C - D) = [A - (B \cup C)] \cup [(A \cap D) - B]$.

SOLUȚIE. a) Din proprietățile de distributivitate rezultă

$[(A \cup B) \cap (A \cup B^c)] \cup [(A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] =$
$= [A \cup (B \cap B^c)] \cup [A^c \cup (B \cap B^c)] = A \cup A^c = \Omega.$

b) Folosind tot proprietățile de distributivitate avem

$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) =$$
$$= [A \cup (B \cap B^c)] \cap [A^c \cup (B \cap B^c)] = A \cap A^c = \varnothing.$$

c) Din formulele lui De Morgan avem

$$[(A \cap B) \cup (C \cap D)]^c = (A \cap B)^c \cap (C \cap D)^c = (A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c).$$

d) Din proprietățile de distributivitate a intersecției față de reuniune și a reuniunii față de intersecție obținem

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap (B \cup C) =$$
$$= [A \cup (B \cap C)] \cap (B \cup C) = [A \cap (B \cup C)] \cup [(B \cap C) \cap (B \cup C)] =$$
$$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cup [(B \cap C \cap B) \cup (B \cap C \cap C)] =$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

e) Să pornim de la membrul al doilea și să folosim tot proprietățile de distributivitate. Obținem atunci

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D) =$$
$$= [(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D)] \cap [(B \cup C) \cap (B \cup D)] \cap (C \cup D) =$$
$$= [A \cup (B \cap C \cap D)] \cap [B \cup (C \cap D)] \cap (C \cup D) =$$
$$= [A \cup (B \cap C \cap D)] \cap \{[B \cap (C \cup D)] \cup [(C \cap D) \cap (C \cup D)]\} =$$
$$= [A \cup (B \cap C \cap D)] \cap [(B \cap C) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)] =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap [(B \cap C) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D).$$

f) Folosind definiția diferenței și proprietățile de distributivitate, avem

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) =$$
$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A - B) \cup (A - C).$$

g) Tot din definiția diferenței și a proprietăților de distributivitate, deducem

$$[(A \cup C) - B] \cup (B \cap C) = [(A \cup C) \cap B^c] \cup (B \cap C) =$$
$$= [(A \cup C) \cup (B \cap C)] \cap [B^c \cup (B \cap C)] = [(A \cup B \cup C) \cap (A \cup C)] \cap$$
$$\cap [(B^c \cup B) \cap (B^c \cup C)] = (A \cup C) \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup C =$$
$$= (A - B) \cup C.$$

h) Procedînd ca mai înainte, obținem imediat

$$(A - B) - (C - D) = (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c)^c = (A \cap B^c) \cap (C^c \cup D) =$$
$$= [A \cap (B \cup C)^c] \cup (A \cap D \cap B^c) = [A - (B \cup C)] \cup [(A \cap D) - B].$$

6. *Să se arate că sînt adevărate următoarele egalități :*

a) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$;

b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;

c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

SOLUȚIE. a) Fie $\omega \in A - B$; atunci $\omega \in A$ și $\omega \notin B$ sau încă $\omega \in A$ și $\omega \notin A \cap B$, deci $\omega \in A - (A \cap B)$, adică

$$A - B \subseteq A - (A \cap B).$$

Inegalitatea inversă $A - (A \cap B) \subseteq A - B$ rezultă imediat parcurgînd în sens invers raționamentul făcut.

Deci

$$A - B = A - (A \cap B).$$

Pentru partea a doua a egalității avem :

$\omega \in A - B$ implică $\omega \in A$ și $\omega \notin B$ sau încă $\omega \in A \cup B$ și $\omega \notin B$,

de unde deducem $\omega \in (A \cup B) - B$ și deci

$$A - B \subseteq (A \cup B) - B.$$

Fie acum

$$\omega \in (A \cup B) - B$$

care implică

$\omega \in (A \cup B)$ și $\omega \notin B$, de unde se deduce că ($\omega \in A$ și $\omega \notin B$) sau ($\omega \in B$ și $\omega \notin B$) care înseamnă $\omega \in A$ și $\omega \notin B$, adică $\omega \in A - B$.

Deci $(A \cup B) - B \subseteq A - B$.

Aceste două incluziuni ne conduc la egalitatea propusă și cu aceasta dubla egalitate este demonstrată.

b) Fie $\omega \in A \cap (B - C)$; atunci $\omega \in A$ și $\omega \in B - C$, adică $\omega \in A$, $\omega \in B$ și $\omega \notin C$ simultan, de unde urmează că $\omega \in A \cap B$ și $\omega \notin A \cap C$ simultan, sau că

$$\omega \in (A \cap B) - (A \cap C).$$

Deci

$$A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C).$$

Urmînd raționamentul în sens invers găsim că

$$(A \cap B) - (A \cap C) \subseteq A \cap (B - C)$$

de unde urmează egalitatea propusă.

c) Fie $\omega \in (A \cup B) - C$; atunci $\omega \in A \cup B$ și $\omega \notin C$ care implică ($\omega \in A$ sau $\omega \in B$) și $\omega \notin C$ ceea ce înseamnă $\omega \in A$ și $\omega \notin C$ simultan, sau $\omega \in B$ și $\omega \notin C$ simultan, adică $\omega \in A - C$ sau $\omega \in B - C$ care este totuna cu $\omega \in (A - C) \cup (B - C)$, care ne conduce la

$$(A \cup B) - C \subseteq (A - C) \cup (B - C).$$

Reciproc, din $\omega \in (A - C) \cup (B - C)$ urmează că $\omega \in A - C$ sau $\omega \in B - C$ care înseamnă $\omega \in A$ și $\omega \notin C$ simultan, sau $\omega \in B$ și $\omega \notin C$ simultan, deci că $\omega \in A \cup B$ și $\omega \notin C$, adică $\omega \in (A \cup B) - C$, așa că

$$(A - C) \cup (B - C) \subseteq (A \cup B) - C,$$

de unde urmează egalitatea celor două mulțimi.

7. *Să se demonstreze următoarele egalități*:

a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

b) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$;

c) $(A \triangle B) \cup (A \triangle B^c) = \Omega$.

SOLUȚIE. a) Ținînd cont de definiția diferenței simetrice obținem

$$A \cap (B \triangle C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)] =$$
$$= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)].$$

Pe baza exercițiului 6 punctul (b) putem scrie mai departe

$$[(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)] = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

b) Fie $\omega \in A \triangle B$, atunci $\omega \in A - B$ sau $\omega \in B - A$, care implică

$$(\omega \in A \text{ și } \omega \notin B) \text{ sau } (\omega \in B \text{ și } \omega \notin A).$$

$\omega \in A$ și $\omega \notin B$ implică $\omega \in A \cup B$ și $\omega \notin A \cap B$ deci $\omega \in (A \cup B) - (A \cap B)$.

Mai departe $\omega \in B$ și $\omega \notin A$ ne conduce la același rezultat, deci

$$A \triangle B \subseteq (A \cup B) - (A \cap B).$$

Reciproc, dacă $\omega \in (A \cup B) - (A \cap B)$ atunci $\omega \in A \cup B$ și $\omega \notin A \cap B$, adică ($\omega \in A$ sau $\omega \in B$) și ($\omega \notin A$ sau $\omega \notin B$) care implică [($\omega \in A$ sau $\omega \in B$) și $\omega \notin A$] sau [($\omega \in A$ sau $\omega \in B$) și $\omega \notin B$] care conduce la $\omega \in (B - A)$ sau $\omega \in (A - B)$ deci $\omega \in A \triangle B$ și prin urmare

$$(A \cup B) - (A \cap B) \subseteq A \triangle B.$$

Cu aceasta, egalitatea este dovedită.

c) Într-adevăr

$$(A \triangle B) \cup (A \triangle B^c) = [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] \cup [(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)] =$$
$$= [(A \cap B^c) \cup (A \cap B)] \cup [(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)] = A \cup A^c = \Omega.$$

8. *Să se demonstreze egalitățile următoare, între mulțimile* A, B, C:

a) $A - \{A - [B - (B - C)]\} = A \cap B \cap C$;

b) $A \cup B - (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

SOLUȚIE. a) Fie $\omega \in A - \{A - [B - (B - C)]\}$; atunci $\omega \in A$ și $\omega \notin A - [B - (B - C)]$ adică $\omega \in A$ și $\omega \in B - (B - C)$, adică $\omega \in A$ și $\omega \in B$ și $\omega \notin B - C$ sau încă

$$\omega \in A \text{ și } \omega \in B \text{ și } \omega \in C$$

prin urmare

$$A - \{A - [B - (B - C)]\} \subseteq A \cap B \cap C.$$

Reciproc, din $\omega \in A \cap B \cap C$ avem $\omega \in A$ și $\omega \in B$ și $\omega \in C$ care implică $\omega \in A$ și $\omega \in B$ și $\omega \notin B - C$, care implică $\omega \in A$ și $\omega \in B - (B - C)$, care implică $\omega \in A$ și $\omega \notin A - [B - (B - C)]$, care în definitiv ne dă

$$\omega \in A - \{A - [B - (B - C)]\}$$

și deci

$$A \cap B \cap C \subseteq A - \{A - [B - (B - C)]\}.$$

Cele două incluziuni obținute ne demonstrează egalitatea propusă.
b) Fie $\omega \in A \cup B - (A \cap B)$; aceasta înseamnă că

$$\omega \in A \cup B \text{ și } \omega \notin A \cap B \text{ care implică } \omega \in A$$

și ($\omega \notin A$ sau $\omega \notin B$) simultan, sau $\omega \in B$ dar ($\omega \notin A$ sau $\omega \notin B$) simultan care implică $\omega \in (A \cap B^c)$ sau $\omega \in A^c \cap B$ adică

$$\omega \in (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

și deci

$$A \cup B - (A \cap B) \subseteq (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Reciproc, fie $\omega \in (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, care înseamnă $\omega \in A \cap B^c$ sau $\omega \in A^c \cap B$ care implică $\omega \in A$ și $\omega \notin B$, sau $\omega \notin A$ și $\omega \in B$ care implică $\omega \in A \cup B$ și ($\omega \notin A$ sau $\omega \notin B$) simultan. Deci $\omega \in A \cup B - (A \cap B)$ care ne dă

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \subseteq A \cup B - (A \cap B).$$

Cele două incluziuni obținute dovedesc egalitatea dată.

9. *Fie dat șirul de mulțimi* $(A_n)_{n \in N}$ *și să formăm șirul* $(B_n)_{n \in N}$ *în felul următor*

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_1^c \cap A_2$$

. . . . . .

$$B_k = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{k-1}^c \cap A_k$$

. . . . . .

unde prin A_k^c am notat complementara mulțimii A_k. Să se arate că mulțimile B_k, $k = 1, 2, \ldots$ sînt disjuncte două cîte două și că

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

SOLUȚIE. Avem pentru $h \neq k$ (să presupunem, pentru a ne fixa, că $h < k$) :

$$B_h \cap B_k = (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{h-1}^c \cap A_h) \cap (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \\ \ldots \cap A_{h-1}^c \cap A_h^c \cap \ldots \cap A_{k-1}^c \cap A_k)$$

și cum intersecția este asociativă rezultă că

$B_h \cap B_k = \varnothing$ dacă $h \neq k$ (cazul $h > k$ se obține prin simetrie).

Pentru partea a doua să notăm cu $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Cum $B_n \subseteq A_n$ $n = 1, 2, \ldots$ rezultă că

$$B \subseteq A .$$

Reciproc, fie $\omega \in A$; aceasta înseamnă că există un indice $n \in N^*$ astfel încît $\omega \in A_n$ de unde urmează că $\omega \in B_n$ și deci $A \subseteq B$.

Așadar

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

10. *Să se demonstreze următoarea egalitate :*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{k=1}^{m} B_k = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k) .$$

SOLUȚIE. Fie $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{k=1}^{m} B_k$; atunci rezultă că $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\omega \notin \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ simultan. Aceasta implică existența unui $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît $\omega \in A_i$ și $\omega \notin \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ sau încă, există un i astfel încît $\omega \in A_i$ și $\omega \notin B_k$ oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, m$ și deci $\omega \in A_i - B_k$ oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, m$ ceea ce înseamnă că

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k)$$

adică

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k) .$$

Reciproc, dacă

$$\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k)$$

rezultă că există un indice i pentru care $\omega \in \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k)$, care implică faptul că $\omega \in A_i - B_k$ oricare ar fi $k = 1, \ldots, m$; deci că $\omega \in A_i$ și $\omega \notin B_k$ simultan oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, m$ deci $\omega \in A_i$ și $\omega \notin \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ sau încă $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ de unde deducem

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{m} (A_i - B_k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{k=1}^{m} B_k .$$

Cele două incluziuni obținute ne demonstrează egalitatea propusă.

11. *Fie* $(A_i)_{i \in I}$ *o familie de mulțimi din* $\mathcal{P}(\Omega)$, $(J_\alpha)_{\alpha \in L} \subset I$ *unde* I *și* L *sînt familii de indici. Atunci avem*

$$\bigcup_{\gamma \in \bigcup_{\alpha \in L} J_\alpha} A_\gamma = \bigcup_{\alpha \in L} \left(\bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma \right) .$$

SOLUȚIE. Fie $\omega \in \bigcup_{\gamma \in \bigcup_{\alpha \in L} J_\alpha} A_\gamma$; atunci există un indice $\alpha \in L$ astfel încît $\omega \in \bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma$ de unde urmează că $\omega \in \bigcup_{\alpha \in L} \left(\bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma \right)$ și deci

$$\bigcup_{\gamma \in \bigcup_{\alpha \in L} J_\alpha} A_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} \left(\bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma \right) .$$

Fie acum

$$\omega \in \bigcup_{\alpha \in L} \left(\bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma \right) ;$$

atunci există $\alpha \in L$ astfel încît $\omega \in \bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma$. Urmează deci că $\omega \in \bigcup_{\gamma \in \bigcup_{\alpha \in L} J_\alpha} A_\gamma$. de unde

$$\bigcup_{\alpha \in L} \left(\bigcup_{\gamma \in J_\alpha} A_\gamma \right) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \bigcup_{\alpha \in L} J_\alpha} A_\gamma .$$

Cele două incluziuni ne conduc la egalitatea dorită.

Observație. Dacă $L = \{1, 2, 3\}$ atunci, egalitatea de mai înainte devine

$$\bigcup_{\alpha \in J_1 \cup J_2 \cup J_3} A_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in J_1} A_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J_2} A_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J_3} A_\alpha \right) .$$

12. *Fie* $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ *și* $(B_\beta)_{\beta \in J}$ *două familii arbitrare din* $\mathcal{P}(\Omega)$. *Atunci avem egalitatea*

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta \right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta) .$$

SOLUȚIE. Fie $\omega \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta)$; atunci $\omega \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ și $\omega \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$, care implică; există $\alpha \in I$ și $\beta \in J$ astfel încît $\omega \in A_\alpha \cap B_\beta$, de unde urmează că $\omega \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta)$.

Deci

$$(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) \subseteq \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha - B_\beta).$$

Fie acum $\omega \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta)$, atunci există $\alpha \in I$, $\beta \in J$ astfel încît $\omega \in (A_\alpha \cap B_\beta)$ de unde urmează că $\omega \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ și $\omega \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$ și deci $\omega \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta)$ care ne arată că

$$\bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \cap B_\beta) \subseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta).$$

Cele două incluziuni obținute ne dau egalitatea dorită.

13. *Dacă $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ este o familie de mulțimi din $\mathcal{P}(\Omega)$ și $(B_\beta)_{\beta \in J}$ o familie de mulțimi din $\mathcal{P}(\Omega')$ atunci avem*

$$(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \times (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \times B_\beta).$$

SOLUȚIE. Fie $(\omega, \omega') \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \times (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta)$. Atunci $\omega \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ și $\omega' \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$; deci există $\alpha \in I$ și $\beta \in J$ astfel încît $(\omega, \omega') \in A_\alpha \times B_\beta$, de unde urmează că

$$(\omega, \omega') \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \times B_\beta)$$

adică

$$(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \times (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) \subseteq \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \times B_\beta).$$

Dacă $(\omega, \omega') \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \times B_\beta)$ urmează că există $\alpha \in I$ și $\beta \in J$ astfel încît $(\omega, \omega') \in A_\alpha \times B_\beta$. Aceasta implică faptul că $\omega \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ și $\omega' \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$ deci că

$$(\omega, \omega') \in (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \times (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta)$$

și prin urmare

$$\bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} (A_\alpha \times B_\beta) \subseteq (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \times (\bigcup_{\beta \in J} B_\beta).$$

Cele două incluziuni dovedesc egalitatea propusă.

14. *Fie* Ω *și* Ω' *două mulțimi. Dacă* $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ *și* $f: \Omega \to \Omega'$, *să se arate că avem*

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Să se dea un exemplu în care

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \textit{(incluziune strictă)}.$$

SOLUȚIE. Fie $\omega' \in f(A \cap B)$ și $\omega \in \Omega$ un element pentru care $f(\omega) = \omega'$. Rezultă de aici că $\omega \in A \cap B$, adică simultan $\omega \in A$ și $\omega \in B$, de unde tot simultan $f(\omega) = \omega' \in f(A)$ și $\omega' \in f(B)$, deci $\omega' \in f(A) \cap f(B)$, ceea ce ne arată că

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Fie acum $\Omega = (-1, 1)$ și $f: \Omega \to R$ prin relația $f(\omega) = \omega^2$, $\omega \in \Omega$. Atunci $f(\Omega) = [0, 1)$.

Să luăm $A = (-1, 0]$, $B = [0, 1)$. În acest caz

$$A \cap B = \{0\} \text{ iar } f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}.$$

Pe de altă parte $f(A) = [0, 1)$, $f(B) = [0, 1)$ și

$$f(A) \cap f(B) = [0, 1)$$

de unde urmează că

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

15. *Dacă* $(A_i)_{i \in I}$ *este o familie de părți ale lui* Ω *și* $f: \Omega \to \Omega'$ *să se arate că avem*

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

SOLUȚIE. Fie $\omega' \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ și $\omega \in \Omega$ astfel încît $f(\omega) = \omega'$. Rezultă (cum $\omega \in \Omega$) că există un indice $i \in I$ pentru care $\omega \in A_i$, de unde urmează că

$$f(\omega) = \omega' \in f(A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

Așadar

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

Reciproc, dacă $\omega' \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$, există un indice $i \in I$ pentru care $\omega' \in f(A_i)$ și astfel deducem că $\omega \in \Omega$ pentru care $\omega' = f(\omega)$ implică $\omega \in A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Deci $\omega' \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ și deci

$$\bigcup_{i \in I} f(A_i) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Cele două incluziuni obținute ne dau împreună egalitatea ce ne-am propus să arătăm.

16. *Fie f o aplicație a mulțimii Ω în mulțimea Ω'. Dacă $A \subseteq f(\Omega)$, $B \subseteq f(\Omega)$, să se arate că*

$$\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B).$$

SOLUȚIE. Fie $\omega \in \overset{-1}{f}(A \cap B)$. Aceasta înseamnă că $f(\omega) \in A \cap B$, deci simultan $f(\omega) \in A$ și $f(\omega) \in B$, de unde urmează că avem simultan $\omega \in \overset{-1}{f}(A)$ și $\omega \in \overset{-1}{f}(B)$, adică $\omega \in \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$ și prin urmare

$$\overset{-1}{f}(A \cap B) \subseteq \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B). \tag{1}$$

Reciproc, din $\omega \in \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$ urmează că avem simultan $f(\omega) \in A$ și $f(\omega) \in B$, adică $f(\omega) \in A \cap B$, de unde $\omega \in \overset{-1}{f}(A \cap B)$.

Deci

$$\overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B) \subseteq \overset{-1}{f}(A \cap B). \tag{2}$$

Inegalitățile (1) și (2) ne dau

$$\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B).$$

17. *Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de părți ale mulțimii $f(\Omega)$, atunci*

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i).$$

SOLUȚIE. Dacă $\omega \in \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ atunci $f(\omega) \in \bigcup_{i \in I} A_i$ și deci există un indice $i \in I$ pentru care $f(\omega) \in A_i$ de unde urmează că $\omega \in \overset{-1}{f}(A_i) \subset \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i)$ ceea ce dovedește că

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i).$$

Reciproc, fie $\omega \in \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i)$. Înseamnă că există un indice $i \in I$ pentru care $\omega \in \overset{-1}{f}(A_i)$ sau încă $f(\omega) \in A_i$. De aici urmează $f(\omega) \in \bigcup_{i \in I} A_i$ și deci $\omega \in \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Prin urmare

$$\bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(A_i) \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

care împreună cu incluziunea de mai înainte ne dau

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(A_i) .$$

18. *Dacă* $(A_i)_{i\in I}$ *este o familie de părți ale mulțimii* $f(\Omega)$ *atunci*

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(A_i) .$$

SOLUȚIE. Fie $\omega \in \overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Aceasta înseamnă că $f(\omega) \in \bigcap_{i\in I} A_i$, deci $f(\omega) \in A_i$, $i \in I$ (simultan), de unde urmează că avem simultan $\omega \in \overset{-1}{f}(A_i)$, $i \in I$, adică $\omega \in \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(A_i)$ și prin urmare

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(A_i) .$$

Reciproc, din $\omega \in \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(A_i)$ urmează că avem simultan $f(\omega) \in A_i$, $i \in I$, adică $f(\omega) \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

De aici urmează $\omega \in \overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ și deci

$$\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(A_i) \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) .$$

Cele două incluziuni obținute ne dau egalitatea propusă pentru demonstrat.

19. *Fie* Ω *și* Ω' *două mulțimi arbitrare. Dacă* $f: \Omega \to \Omega'$ *și* $A \subset \Omega'$, *atunci*

$$\overset{-1}{f}(\Omega' - A) = \Omega - \overset{-1}{f}(A) .$$

SOLUȚIE. Fie $\omega \in \overset{-1}{f}(\Omega' - A)$. Atunci $f(\omega) \in \Omega' - A$, deci $f(\omega) \in \Omega'$ și $f(\omega) \notin A$. Dar aceasta implică $\omega \in \overset{-1}{f}(\Omega') = \Omega$ și $\omega \notin \overset{-1}{f}(A)$, adică $\omega \in \Omega - \overset{-1}{f}(A)$ și deci

$$\overset{-1}{f}(\Omega' - A) \subseteq \Omega - \overset{-1}{f}(A) .$$

Reciproc, dacă $\omega \in \Omega - \overset{-1}{f}(A)$ urmează că $\omega \in \Omega$ și $\omega \notin \overset{-1}{f}(A)$ deci că $f(\omega) \in \Omega'$ și $f(\omega) \notin A$, adică $f(\omega) \in \Omega' - A$ sau încă $\omega \in \overset{-1}{f}(\Omega' - A)$. Urmează deci

$$\Omega - \overset{-1}{f}(A) \subseteq \overset{-1}{f}(\Omega' - A) .$$

Cele două incluziuni obținute ne demonstrează egalitatea.

20. *Dacă notăm* $g = f|_A$ *(restricția funcției* f *la mulțimea* A*) atunci*

$$\overset{-1}{g}(B) = A \cap \overset{-1}{f}(B).$$

SOLUȚIE.

$$\overset{-1}{g}(B) = \{\omega;\ g(\omega) \in B\} = \{\omega;\ \omega \in A;\ f(\omega) \in B\} =$$
$$= \{\omega;\ \omega \in A\} \cap \{\omega;\ f(\omega) \in B\} = A \cap \overset{-1}{f}(B).$$

21. *Fie* Ω *și* Ω' *două mulțimi arbitrare și* $f: \Omega \to \Omega'$.
Dacă $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ *și* $f|_{A_i} = f_i$, *atunci*

$$\overset{-1}{f}(B) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f_i}(B) \text{ pentru orice } B \subset \Omega'.$$

SOLUȚIE.

$$\overset{-1}{f}(B) = \overset{-1}{f}(B) \cap \Omega = \overset{-1}{f}(B) \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\overset{-1}{f}(B) \cap A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f_i}(B),$$

conform cu rezultatul exercițiului precedent.

II

CÎMPURI DE PROBABILITATE. PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE. PROBABILITĂȚI GEOMETRICE

1. *Într-o urnă sînt 25 bile, dintre care 14 albe și restul negre. Se extrag dintr-odată două bile. Să se calculeze probabilitatea ca ele să fie de culori diferite. Să se generalizeze pentru compoziția (a, b) a urnei.*

SOLUȚIE. Numărul cazurilor posibile este dat de C_{25}^2, iar numărul cazurilor favorabile de $C_{14}^1 \cdot C_{11}^1$.

Așadar

$$P_2(1,1) = \frac{C_{14}^1 \cdot C_{11}^1}{C_{25}^2}.$$

În cazul general, numărul cazurilor posibile este C_{a+b}^2 iar cel al cazurilor favorabile este $C_a^1 \cdot C_b^1$ și prin urmare probabilitatea este dată de

$$P_2(1,1) = \frac{C_a^1 \cdot C_b^1}{C_{a+b}^2}.$$

2. *Din urna indicată în problema precedentă se extrag succesiv 4 bile, fără a pune bila extrasă înapoi în urnă. Să se calculeze probabilitatea ca toate bilele extrase să fie albe.*

SOLUȚIE. Numărul cazurilor posibile este C_{25}^4 iar numărul cazurilor favorabile C_{14}^4, de unde probabilitatea căutată

$$P_4(4,0) = \frac{C_{14}^4 \cdot C_{11}^0}{C_{25}^4} = \frac{C_{14}^4}{C_{25}^4}.$$

[Prin $P_k(\alpha, \beta)$ am notat probabilitatea că din cele k bile extrase dintr-o dată să avem α bile albe și β bile negre.]

3. *Într-o cutie de chibrituri conținînd 41 bețe, 3 sînt fără gămălie. Scoțînd 16 bețe la întîmplare, să se determine probabilitatea ca printre acestea să se găsească cele 3 bețe defecte.*

SOLUȚIE.. Numărul cazurilor posibile este C_{41}^{16} iar numărul cazurilor favorabile este $C_{38}^{13} \cdot C_3^3$.

Deci

$$P_{16}(13,3) = \frac{C_{38}^{13} \cdot C_3^3}{C_{41}^{16}}.$$

4. *Într-o ladă cu* 80 *pachete cu țigări,* 4 *pachete au cîte o țigară ruptă Care este probabilitatea ca o persoană care cumpără* 4 *pachete să primească toate pachetele cu țigări rupte?*

Care este probabilitatea ca să primească cel puțin două pachete cu țigări rupte?

SOLUȚIE. Dacă notăm cu p_1 probabilitatea ca o persoană ce cumpără 4 pachete să primească toate pachetele cu țigări rupte, vom avea folosind schema bilei neîntoarse că

$$p_1 = \frac{C_4^4 \cdot C_{76}^0}{C_{80}^4}.$$

Dacă p_2 este probabilitatea ca să primească cel puțin două pachete cu țigări rupte, atunci

$$p_2 = \frac{1}{C_{80}^4}(C_4^2 \cdot C_{76}^2 + C_4^3 \cdot C_{76}^1 + C_4^4 \cdot C_{76}^0).$$

5. *O urnă conține* 20 *de bile albe și* 8 *negre. Care este probabilitatea de a extrage deodată* 7 *bile albe și* 3 *negre?*

SOLUȚIE. Folosind schema bilei neîntoarse aflăm că

$$P_{10}(7,3) = \frac{C_{20}^7 \cdot C_8^3}{C_{28}^{10}}.$$

6. *La o loterie sînt N numere și se extrag n. Care este probabilitatea de a obține a numere stabilite dinainte?* [*Caz particular* : $N = 90$, $n = 5$; $a = 3$].

SOLUȚIE. Folosind schema bilei neîntoarse avem

$$P = \frac{C_{N-a}^{n-a} \cdot C_a^a}{C_N^n}.$$

În cazul particular dat, găsim

$$P = \frac{C_{87}^2 \cdot C_3^3}{C_{90}^5}.$$

7. *O urnă conține* 8 *bile albe și* 8 *negre. Să se determine probabilitatea că extrăgînd* 5 *bile, fără a pune bila înapoi, să obținem*

a) 5 *bile albe*;

b) 3 *bile albe și* 2 *negre.*

SOLUȚIE. a) Folosind schema bilei neîntoarse și notînd cu A evenimentul că cele 5 bile să fie albe avem

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_8^0}{C_{16}^5}.$$

b) Fie B evenimentul ca să avem 3 bile albe și 2 negre. Atunci

$$P(B) = \frac{C_8^3 \cdot C_8^2}{C_{16}^5}.$$

8. *Din* 16 *borcane de cîte* 1 kg, 4 *conțin dulceață de caise și* 12 *de prune. Grupîndu-se la întîmplare cîte* 4 *borcane, să se determine probabilitatea ca fiecare grupă să conțină un borcan cu dulceață de caise.*

SOLUȚIE. Folosind același raționament ca la problema precedentă găsim

$$P = \frac{C_{12}^3 \cdot C_4^1}{C_{16}^4} \cdot \frac{C_9^3 \cdot C_3^1}{C_{12}^4} \cdot \frac{C_6^3 \cdot C_2^1}{C_8^4}.$$

9. *Se aruncă* 7 *monede. Care este probabilitatea ca să apară de* 5 *ori stema și de* 2 *ori fața?*

SOLUȚIE. Observăm că a arunca 7 monede este același lucru cu a arunca de 7 ori o monedă. Cum la fiecare aruncare probabilitatea de a apare stema este egală cu probabilitatea de a apare fața și este egală cu $\frac{1}{2}$, rezultă prin aplicarea schemei lui Bernoulli că

$$P_7(5,2) = C_7^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = C_7^5 \frac{1}{2^7}.$$

10. *La o loterie cu* 40 000 *bilete sînt trei lozuri cîștigătoare. Scoțînd* 8 000 *bilete, se cere probabilitatea de a obține:*

a) *un loz cîștigător;*

b) *trei lozuri cîștigătoare.*

SOLUȚIE. Aplicăm schema bilei neîntoarse și găsim

a) $p_1 = \frac{C_3^1 \cdot C_{39997}^{7999}}{C_{40000}^{8000}}$; b) $p_3 = \frac{C_3^3 \cdot C_{39997}^{7997}}{C_{40000}^{8000}}$.

11. *O urnă conține* 8 *bile albe,* 8 *negre și* 8 *roșii. Se extrag* 3 *bile la întîmplare. Care este probabilitatea ca bilele extrase să fie de culori diferite?*

SOLUȚIE. Aplicăm schema bilei neîntoarse pentru cazul unei urne cu mai multe culori și aflăm

$$p = \frac{C_8^1 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1}{C_{24}^3} = \frac{(C_8^1)^3}{C_{24}^3}.$$

12. *Se aruncă o monedă de* 10 *ori. Să se calculeze probabilitatea de a obține de* 6 *ori stema.*

SOLUȚIE. Aplicînd schema lui Bernoulli găsim că

$$P_{10}(6,4) = C_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = C_{10}^6 \frac{1}{2^{10}}.$$

13. *Avem* 52 *obiecte dintre care* 4 *poartă un semn distinctiv. Împărțindu-se aceste* 52 *obiecte în patru grupe egale, care este probabilitatea ca în fiecare grupă să se găsească un obiect cu semnul distinctiv?*

SOLUȚIE. Probabilitatea ca în prima grupă să se găsească un obiect cu semnul distinctiv este

$$\frac{C_{48}^{12} \cdot C_4^1}{C_{52}^{13}}.$$

Probabilitatea ca în a doua grupă să se găsească un obiect cu semnul distinctiv este

$$\frac{C_{36}^{12} \cdot C_3^1}{C_{39}^{13}}.$$

iar probabilitatea ca în grupa a treia să se afle un obiect cu semnul distinctiv este

$$\frac{C_{24}^{12} \cdot C_2^1}{C_{26}^{13}}$$

și deci în grupa a patra se află un obiect cu semnul distinctiv.

Prin urmare probabilitatea ca în fiecare grupă să se afle un obiect cu semn distinctiv, este produsul acestor probabilități adică

$$P = \frac{C_{48}^{12} \cdot C_4^1}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{C_{36}^{12} \cdot C_3^1}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{C_{24}^{12} \cdot C_2^1}{C_{26}^{13}}.$$

14. *Aruncînd 4 zaruri, să se determine probabilitatea de a obține fața 1 cel puțin o dată.*

SOLUȚIE. A arunca patru zaruri este același lucru cu a arunca cu un singur zar de patru ori. Dacă notăm acum cu A evenimentul de a apare cel puțin o dată fața 1 cînd aruncăm 4 zaruri, atunci avem

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Din $P(A^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ rezultă că

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

15. *În problema precedentă să se determine probabilitatea de a obține fața 1 o singură dată.*

SOLUȚIE. Fie A_{i1} evenimentul că la aruncarea i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ cu zarul, apare fața 1.

Dacă acum notăm cu B evenimentul ca în cele patru aruncări cu zarul să apară fața 1 o singură dată, atunci

$$B = (A_{11} \cap A_{21}^c \cap A_{31}^c \cap A_{41}^c) \cup (A_{11}^c \cap A_{21} \cap A_{31}^c \cap A_{41}^c) \cup$$
$$\cup (A_{11}^c \cap A_{21}^c \cap A_{31} \cap A_{41}^c) \cup (A_{11}^c \cap A_{21}^c \cap A_{31}^c \cap A_{41}).$$

Urmează de aici că

$$P(B) = C_4^1 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1\,296}.$$

16. *De cîte ori trebuie să aruncăm un zar pentru ca cu o probabilitate mai mare de* $\frac{1}{2}$, *să ne apară cel puțin o dată fața cu numărul* 6?

SOLUȚIE. Avem

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$$

sau

$$\left(\frac{6}{5}\right)^n > 2$$

de unde rezultă că

$$n > \frac{\lg 2}{\lg 6 - \lg 5} = 3{,}80 \ldots$$

17. *Se aruncă două zaruri de* 15 *ori.*

a) *Să se calculeze probabilitatea ca dubla* 6 *să apară cel puțin o dată.*

b) *Să se calculeze probabilitatea ca dubla* 6 *să apară cel puțin de două ori.*

SOLUȚIE. a) Fie A evenimentul ca să apară dubla 6 cel puțin o dată iar A_0 evenimentul contrar, să nu apară dubla 6 niciodată. Atunci $P(A_0) = \left(\frac{35}{36}\right)^{15}$ pentru că aruncările sînt independente. De aici urmează

$$P(A) = 1 - P(A_0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{15}.$$

b) Fie C evenimentul că dubla 6 apare cel mult o dată și D evenimentul că dubla 6 apare cel puțin de două ori. Atunci

$$P(C) = P(A_0 \cup A_1) = P(A_0) + P(A_1),$$

unde prin A_1 am notat evenimentul că dubla 6 apare o singură dată. [Se vede că evenimentele A_1 și A_0 sînt incompatibile.]

Deci

$$P(C) = \left(\frac{35}{36}\right)^{15} + C_{15}^1 \left(\frac{35}{36}\right)^{14} \frac{1}{36}.$$

Urmează de aici că

$$P(D) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{15} - C_{15}^1 \frac{1}{36} \left(\frac{35}{36}\right)^{14}.$$

18. *La o loterie sînt* 96 *de bilete, dintre care* 8 *cîștigătoare. O persoană cumpără* 12 *bilete. Să se determine probabilitatea*:

a) *un bilet și numai unul să fie cîștigător*;

b) *cel puțin* 3 *bilete să fie cîștigătoare*;

c) *să iasă cele* 8 *bilete cîștigătoare*;

d) *să nu iasă nici un bilet cîștigător.*

SOLUȚIE. Cu ajutorul formulei generale pentru schema bilei neîntoarse, obținem

a) $p_1 = \frac{C_8^1 \cdot C_{88}^{11}}{C_{96}^{12}}$.

b) $P_3 = P(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8) = \sum_{k=3}^{8} P(A_k)$,

unde prin A_k, $k = 3, 4, \ldots, 8$ am notat evenimentul ca să apară k bilete cîștigătoare, $k = 3, 4, \ldots, 8$.

Se vede că $A_3, \ldots, A_8$ sînt incompatibile două cîte două.

Dar

$$P(A_k) = \frac{C_8^k \cdot C_{88}^{12-k}}{C_{96}^{12}}, \quad k = 3, 4, \ldots, 8.$$

Prin urmare

$$P_3 = \sum_{k=3}^{8} \frac{C_8^k \cdot C_{88}^{12-k}}{C_{96}^{12}} = \frac{1}{C_{96}^{12}} \sum_{k=3}^{8} C_8^k \cdot C_{88}^{12-k}.$$

Același rezultat îl mai putem obține în felul următor: evenimentul „cel mult două bilete cîștigătoare" este contrar evenimentului „cel puțin trei bilete cîștigătoare".

Deci

$$P_3 = 1 - P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(A_k) =$$

$$= 1 - \frac{1}{C_{96}^{12}} \sum_{k=0}^{2} C_8^k \cdot C_{88}^{12-k}.$$

c) $p_8 = P(A_8) = \frac{C_8^8 \cdot C_{88}^4}{C_{96}^{12}}$.

d) $p_0 = P(A_0) = \frac{C_8^0 \cdot C_{88}^{12}}{C_{96}^{12}}$.

Observație. Aici am notat prin p_m probabilitatea ca să iasă exact m bilete cîștigătoare iar prin P_m probabilitatea ca să avem cel puțin m bilete cîștigătoare.

19. *Se aruncă 3 zaruri. Să se calculeze probabilitatea ca suma punctelor obținute să fie:*

a) *mai mică decît* 8;

b) *mai mare decît* 7;

c) *egală cu* 12.

SOLUȚIE. a) Fie A_k evenimentul care constă în faptul că dintr-o aruncare cu trei zaruri obținem suma k, $3 \leqslant k \leqslant 18$.

Atunci, folosind pentru probabilitate raportul dintre numărul cazurilor favorabile pe numărul cazurilor posibile avem

$$P(A_k) = \frac{\text{card}\left\{(e_1, e_2, e_3);\ e_j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ 1 \leqslant j \leqslant 3;\ \sum_{j=1}^{3} e_j = k\right\}}{\text{card}\{(e_1, e_2, e_3);\ e_j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}}.$$

Dacă acum notăm cu A evenimentul ca într-o aruncare suma punctelor obținute să fie mai mică decît 8, putem scrie că

$$A = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7.$$

Evenimentele A_k; $3 \leqslant k \leqslant 18$ fiind incompatibile două cîte două găsim

$$P(A) = \sum_{k=3}^{7} P(A_k);$$

$$P(A_3) = \frac{1}{6^3} \text{ evident};$$

$$P(A_4) = \frac{3}{6^3}.$$

Pentru găsirea acestui rezultat raționăm în felul următor : Considerăm cubul determinat prin intersecția planelor $x = 1$, $x = 6$, $y = 1$, $y = 6$, $z = 1$, $z = 6$ într-un sistem de axe rectangulare tridimensional. Secționăm acest cub apoi cu plane paralele cu axele și anume cu $x = 2, 3, 4, 5$; $y = 2, 3, 4, 5$; $z = 2, 3, 4, 5$. Mulțimea tuturor punctelor de intersecție astfel obținute ne dă mulțimea tripletelor (e_1, e_2, e_3); $e_j \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)$; $1 \leqslant j \leqslant 3$.

În fiecare plan $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, avem cîte 36 puncte, deci în total 6^3 puncte.

Triplete (e_1, e_2, e_3); $e_j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $1 \leqslant j \leqslant 3$; $\sum_{j=1}^{3} e_j = 4$ avem două în planul $z = 1$ și unul în planul $z = 2$.

În total deci trei puncte și deci $P(A_4) = \frac{3}{6^3}$.

Triplete (e_1, e_2, e_3); $e_j \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $1 \leqslant j \leqslant 3$; $\sum_{j=1}^{3} e_j = 5$ avem trei în planul $z = 1$, două în planul $z = 2$ și unul în planul $z = 3$ deci în total 6 puncte care corespund acestui caz și prin urmare :

$$P(A_5) = \frac{6}{6^3}.$$

Repetînd raționamentul de mai înainte găsim

$$P(A_6) = \frac{10}{6^3}; \quad P(A_7) = \frac{15}{6^3}.$$

Așadar

$$P(A) = \frac{1}{6^3}(1+3+6+10+15) = \frac{35}{6^3}.$$

b) Dacă B este evenimentul că suma punctelor este mai mare decît 7, atunci

$$B = \bigcup_{j=8}^{18} A_j .$$

Urmează că

$$P(B) = \sum_{j=8}^{18} P(A_j) .$$

Cu ajutorul raționamentului folosit mai înainte găsim

$$P(A_8) = \frac{21}{6^3};\ P(A_9) = \frac{25}{6^3};\ P(A_{10}) = \frac{27}{6^3};$$

$$P(A_{11}) = \frac{27}{6^3};\ P(A_{12}) = \frac{25}{6^3};\ P(A_{13}) = \frac{21}{6^3};\ P(A_{14}) = \frac{15}{6^3};$$

$$P(A_{15}) = \frac{10}{6^3};\ P(A_{16}) = \frac{6}{6^3};\ P(A_{17}) = \frac{3}{6^3};\ P(A_{18}) = \frac{1}{6^3}$$

de unde

$$P(B) = \frac{1}{6^3}(21+25+27+27+25+21+15+10+6+3+1) .$$

La același rezultat se putea ajunge observînd că

$$P(B) + P(A) = 1 \text{ deci } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{35}{6^3}.$$

c) Se vede imediat că

$$P(A_{12}) = \frac{25}{6^3}.$$

Observație. La rezolvarea acestei probleme se mai poate folosi observația că probabilitatea ca să obținem suma m este egală cu coeficientul lui x^m în polinomul $\frac{1}{6^3}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$.

20. *Persoana A aruncă 2 zaruri, iar B 3 zaruri.*
Să se calculeze probabilitățile următoarelor evenimente:
a) *A să obțină același număr de puncte cu B într-o singură probă;*
b) *A să obțină mai multe puncte decît B într-o singură probă;*
c) *A să obțină mai multe puncte decît B în două probe consecutive.*

SOLUȚIE. a) Notăm cu A_h evenimentul ce constă în faptul că jucătorul A obține suma h $(2 \leqslant h \leqslant 12)$, iar cu B_k evenimentul că jucătorul B obține suma k $(3 \leqslant k \leqslant 18)$.

Dacă C este evenimentul că A obține același număr de puncte ca și B, atunci

$$C = \bigcup_{j=3}^{12} (A_j \cap B_j) .$$

Urmează că

$$P(C) = \sum_{j=3}^{12} P(A_j \cap B_j) = \sum_{j=3}^{12} P(A_j)\, P(B_j) .$$

Conform cu raționamentul făcut la exercițiul 19 găsim că

$$P(C) = \frac{2}{6^2}\cdot\frac{1}{6^3} + \frac{3}{6^2}\cdot\frac{3}{6^3} + \frac{4}{6^2}\cdot\frac{6}{6^3} + \frac{5}{6^2}\cdot\frac{10}{6^3} + \frac{6}{6^2}\cdot\frac{15}{6^3} +$$

$$+ \frac{5}{6^2}\cdot\frac{21}{6^3} + \frac{4}{6^2}\cdot\frac{25}{6^3} + \frac{3}{6^2}\cdot\frac{27}{6^3} + \frac{2}{6^2}\cdot\frac{27}{6^3} + \frac{1}{6^2}\cdot\frac{25}{6^3}.$$

b) Fie D evenimentul ca A să obțină mai multe puncte decît B într-o singură probă. Atunci avem

$$D = \bigcup_{j=4}^{12} \left[A_j \cap \left(\bigcup_{k=3}^{j-1} B_k \right) \right]$$

de unde urmează că

$$P(D) = P\left(\bigcup_{j=4}^{12} \left[A_j \cap \left(\bigcup_{k=3}^{j-1} B_k \right) \right] \right) = \sum_{j=4}^{12} P\left(A_j \cap \left(\bigcup_{k=3}^{j-1} B_k \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=4}^{12} \left\{ P(A_j) \left(\sum_{k=3}^{j-1} P(B_k) \right) \right\}.$$

Se fac apoi înlocuirile numerice conform cu raționamentul de la exercițiul 19.

c) Pentru rezolvarea acestui punct raționăm ca și cum A ar arunca cu patru zaruri deodată iar B cu 6 zaruri.

Dacă E este evenimentul ca A să obțină mai multe puncte decît B în două probe consecutive, atunci

$$E = \bigcup_{j=7}^{24} \left[A'_j \cap \left(\bigcup_{k=6}^{j-1} B'_k \right) \right].$$

Urmează de aici că

$$P(E) = P\left(\bigcup_{j=7}^{24} \left[A'_j \cap \left(\bigcup_{k=6}^{j-1} B'_k \right) \right] \right) = \sum_{j=7}^{24} \left\{ P(A'_j) \left[\sum_{k=6}^{j-1} P(B'_k) \right] \right\},$$

unde am notat prin A'_h, $4 \leqslant h \leqslant 24$ evenimentul ca A să obțină, h puncte în două probe consecutive și respectiv cu B'_k, $6 \leqslant k \leqslant 36$ pentru B.

21. *Într-o urnă sînt N bile de m culori diferite și anume N_1 bile de culoarea întîi, N_2 bile de culoarea a doua etc. N_m bile de culoarea m.*

Se fac n extracții succesive fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă. Să se determine probabilitatea ca printre bilele extrase să avem n_1 bile de culoarea întîi, n_2 bile de culoarea a doua etc., n_m bile de culoarea m.

SOLUȚIE. Numărul cazurilor posibile este dat de numărul de combinări ce se pot face cu numărul total de bile din urnă, luate în raport cu numărul de bile extrase din urnă, adică

$$\text{numărul cazurilor posibile} = C_N^n ; \quad \begin{matrix} N = N_1 + N_2 + \ldots + N_m, \\ n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m . \end{matrix}$$

Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul grupelor din C_N^n care conțin n_1 bile de culoarea întîi, n_2 bile de culoarea a doua etc, n_m bile de culoarea m.

Acest număr îl putem afla astfel: luăm numărul de grupuri ce se pot forma cu cele N_1 bile de culoarea întîi fiecare grup avînd cîte n_1 bile. Acest număr este dat de $C_{N_1}^{n_1}$. Lui îi asociem cele $C_{N_2}^{n_2}$ grupuri de cîte n_2 bile de culoarea a doua din totalul de N_2 bile. Obținem

$$C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2} \text{ grupe.}$$

Cu acest număr de grupe procedăm analog și obținem numărul cazurilor favorabile $= C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2} \cdot C_{N_3}^{n_3} \ldots C_{N_m}^{n_m}$.

În felul acesta probabilitatea cerută este

$$P = \frac{C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_m}^{n_m}}{C_N^n} .$$

22. *Se aruncă un zar de 14 ori. Să se calculeze probabilitatea ca fața 1 să apară de 3 ori, fața 2 o dată, fața 3 de 4 ori, fața 4 de 2 ori, fața 5 de 3 ori și fața 6 o singură dată.*

SOLUȚIE. Aplicînd schema multinominală găsim că

$$P_{14}(3, 1, 4, 2, 3, 1) = \frac{14!}{3!\,1!\,4!\,2!\,3!\,1!} \cdot \frac{1}{6^{14}} .$$

23. *Se aruncă de 8 ori o monedă. Se cere probabilitatea de a obține stema de 4 ori.*

SOLUȚIE. Aplicăm cazul particular al legii multinominale cînd $m = 2$, adică legea binominală care ne dă

$$P_{k;n-k}(n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} .$$

Avem $n = 8,\ k = 4;\ p = q = \frac{1}{2}$,

$$P_{4;4}(8) = \frac{8!}{4!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}.$$

24. *Un magazin vinde în cursul unei săptămîni* 2 600 *bucăți dintr-o anumită marfă primită de la fabricile A, B, C în următoarele cantități:*

de la fabrica A,	3 000 *bucăți;*
de la fabrica B,	2 600 *bucăți;*
de la fabrica C	4 200 *bucăți;*
Total	9 800 *bucăți.*

Marfa fiind de aceeași calitate să se determine probabilitatea ca 820 *bucăți din marfa vîndută să fie de la fabrica* A, 500 *de la fabrica B și restul de* 1 280 *bucăți de la fabrica C.*

SOLUȚIE. Aplicînd schema multinomială avem

$$P_{n_1;\,n_2,\,\ldots,\,n_m}(n) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!}\,p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\ldots p_m^{n_m}.$$

În cazul nostru $m = 3,\ n = 2\,600,\ n_1 = 820,\ n_2 = 500,\ n_3 = 1\,280;$

$$p_1 = \frac{3\,000}{9\,800} = \frac{15}{49};\quad p_2 = \frac{2\,600}{9\,800} = \frac{13}{49};\quad p_3 = \frac{4\,200}{9\,800} = \frac{21}{49}.$$

Deci

$$P_{820;\,500;\,1\,280}(2\,600) = \frac{2\,600!}{820!\ 500!\ 1\,280!}\left(\frac{15}{49}\right)^{820}\left(\frac{13}{49}\right)^{500}\left(\frac{21}{49}\right)^{1\,280}.$$

25. *Se aruncă de* 12 *ori un zar. Să se calculeze probabilitatea de a obține de două ori fiecare dintre cele* 6 *fețe.*

SOLUȚIE. Aplicăm schema multinominală.

$$P_{n_1,\,\ldots,\,n_m}(n) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}\,p_1^{n_1}\ldots p_m^{n_m}$$

unde

$$m = 6;\ n = 12;\ n_1 = n_2 = \ldots = n_6 = 2;\ p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}.$$

Așadar

$$P_{2;\,2;\,\ldots;\,2}(12) = \frac{12!}{2!\,2!\ldots 2!}\left(\frac{1}{6}\right)^{12} = \frac{12!}{2^6\,6^{12}} = \frac{1\,925}{559\,872}.$$

26. *Se dau n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ care conțin fiecare bile albe și negre în proporții date. Din fiecare urnă se extrage o bilă la întîmplare. Se cere probabilitatea de a extrage k bile albe și n — k bile negre.*

SOLUȚIE. Fie A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, evenimentul care constă în faptul că se extrage o bilă albă din urna U_i și B_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, evenimentul care constă în faptul că rezultatul extracției este o bilă neagră din urna U_i.

Să notăm $p_i = P(A_i)$, $q_i = P(B_i) = 1 - p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Atunci evenimentul cerut este

$$A_{k,n-k} = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \cup \ldots \\ \ldots \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n).$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} P(A_{k,n-k}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) + \ldots + \\ &+ P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n) = \\ &= P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_k)\,P(B_{k+1}) \ldots P(B_n) + \ldots \\ &\ldots + P(B_1)\,P(B_2) \ldots P(B_{n-k})\,P(A_{n-k+1}) \ldots P(A_n) = \\ &= p_1 p_2 \ldots p_k q_{k+1} \ldots q_n + \ldots + q_1 q_2 \ldots q_{n-k} p_{n-k+1} \ldots p_n = \\ &= \sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k} q_{i_{k+1}} q_{i_{k+2}} \ldots q_{i_n} \end{aligned}$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ este o combinație de cîte k numere din șirul $(1, 2, \ldots, n)$ iar $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$ este o combinație a celorlalte $n - k$ numere rămase, suma efectuîndu-se pentru toate combinațiile indicate mai înainte.

Observăm acum că

$$P(A_{k,n-k}) = \sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k} q_{i_{k+1}} q_{i_{k+2}} \ldots q_{i_n},$$

expresia din membrul al doilea al egalității de mai înainte conține suma diferitelor produse parțiale ale dezvoltării

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \ldots (p_n + q_n) = 1$$

și anume acei termeni care conțin k factori p (cu indici diferiți) și $n - k$ factori q (cu indici diferiți, și diferiți de indicii lui p).

Dacă efectuăm produsul $(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2) \ldots (p_n t + q_n)$ atunci $P(A_{k,n-k})$ este tocmai coeficientul lui t^k din dezvoltarea acestui produs.

Caz particular. Fie $U_1\binom{2a}{3b}$; $U_2\binom{3a}{2b}$; $U_3\binom{2a}{2b}$ trei urne cu compozițiile respective de bile albe și negre.

Din produsul

$$\left(\frac{2}{5}t + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}t + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)$$

găsim că:

— probabilitatea ca din trei extracții să găsim o bilă albă este

$$P(A_{1,2}) = \frac{4}{50} + \frac{9}{50} + \frac{6}{50} = \frac{19}{50};$$

— probabilitatea de a nu ieși nici o bilă albă este

$$P(A_{0,3}) = \frac{6}{50}.$$

27. *O urnă conține 5 bile albe și 3 negre, o altă urnă 6 bile albe și 2 negre și a treia, 7 albe și una neagră. Se extrage cîte o bilă din fiecare urnă. Să se determine probabilitatea ca două bile să fie albe și una neagră.*

SOLUȚIE. Aplicînd schema lui Poisson găsim că probabilitatea de a extrage două bile albe și una neagră este dată de coeficientul lui t^2 din produsul

$$\left(\frac{5}{8}t + \frac{3}{8}\right)\left(\frac{6}{8}t + \frac{2}{8}\right)\left(\frac{7}{8}t + \frac{1}{8}\right).$$

Așadar

$$p = \frac{30}{8^3} + \frac{70}{8^3} + \frac{126}{8^3}.$$

28. *Persoanele A și B joacă în următoarele condiții: se aruncă două zaruri și cînd suma punctelor obținute este mai mică decît 10, atunci B plătește lui A suma de 5 lei. În caz contrar, A plătește lui B o sumă fixă a.*

Să se determine această sumă astfel încît jocul să fie echitabil.

SOLUȚIE. Fie ξ variabila aleatoare ce reprezintă suma punctelor obținute prin aruncarea celor două zaruri.

ξ poate lua valorile 2, 3, 4, ..., 11, 12.

$$P(\xi < 10) + P(\xi \geqslant 10) = 1$$

$$P(\xi < 10) = \sum_{k=2}^{9} P(\xi = k) =$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{6}.$$

Deci

$$P(\xi < 10) = \frac{5}{6}, \quad P(\xi \geqslant 10) = \frac{1}{6}.$$

Prin urmare A cîștigă 5 lei cu probabilitatea $\frac{5}{6}$ și pierde a lei cu probabilitatea $\frac{1}{6}$. Pentru ca jocul să fie echitabil trebuie să avem

$$\frac{5}{6} \cdot 5 = \frac{1}{6} a$$

adică $a = 25$.

29. *Se consideră șirul numerelor naturale* $N^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$ *și* $n \in N^*$. *Se cere*:

a) *să se afle probabilitatea* p_1 *ca alegînd un număr natural la întîmplare, el să fie prim cu* n;

b) *să se afle probabilitatea* q_1 *ca alegînd două numere naturale la întîmplare, cel mult unul să fie prim cu* n.

SOLUȚIE. a) Față de numărul natural $n \in N^*$, toate numerele naturale se împart în clasele de resturi

$$0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dacă acum notăm cu $\varphi(n)$ numărul numerelor prime cu n, din șirul claselor de resturi de mai înainte atunci

$$p_1 = \frac{\varphi(n)}{n}.$$

b) Să presupunem că alegerile pe care le facem sînt independente. Atunci probabilitatea ca ambele numere să fie prime cu n este

$$p_2 = \left[\frac{\varphi(n)}{n}\right]^2.$$

De aici urmează că

$$q_1 = 1 - p_2 = 1 - \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2.$$

30. *Într-un lot de* 200 *piese fabricate la o mașină sînt* 10 *piese cu defecte. Se scot la întîmplare* 20 *piese. Care este probabilitatea ca între cele* 20 *piese extrase să se afle piese cu defecte?*

SOLUȚIE. Observăm că evenimentele A „toate cele 20 piese extrase sînt fără defecte" și B „între cele 20 de piese extrase cel puțin una este cu defect" sînt complementare.

Atunci avem

$$P(B) = 1 - P(A).$$

Din

$$P(A) = \frac{C_{190}^{20} \cdot C_{10}^{0}}{C_{200}^{20}} = \frac{C_{190}^{20}}{C_{200}^{20}}$$

calculată după schema bilei neîntoarse, aflăm

$$P(B) = 1 - \frac{C_{190}^{20}}{C_{200}^{20}}.$$

31. *Numerele* 1, 2, 3, ..., n *se așază la întîmplare.*

a) *Care este probabilitatea ca, numerele* 1 *și* 2 *să fie așezate în șir în ordine crescătoare și consecutiv?*

b) *Care este probabilitatea ca numerele* k, $k+1$ *și* $k+2$ *să fie așezate în ordine crescătoare și consecutiv?* ($k \in (1, 2, \ldots, n)$ *astfel încît* $k \geqslant 1$, $k+2 \leqslant n$).

SOLUȚIE. a) Determinăm probabilitatea ca fiind raportul dintre numărul cazurilor favorabile pe numărul cazurilor posibile.

Numărul cazurilor posibile este dat de numărul de moduri în care putem să scriem numerele 1, 2, ..., n, adică $n!$

Pentru a determina numărul cazurilor favorabile procedăm în felul următor: numerele 3, 4, ..., n le putem scrie în $(n-2)!$ moduri. Cu numerele 1, 2 scrise grupat în felul acesta, din fiecare mod de scriere mai obținem $n-1$ moduri, deci în total $(n-2)! \cdot (n-1) = (n-1)!$ moduri, așadar

$$p = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

b) Dacă din numerele 1, 2, ..., n scoatem cele trei numere determinate k, $k+1$ și $k+2$, atunci pe cele rămase le putem grupa în $(n-3)!$ moduri. Cu ajutorul grupului k, $k+1$, $k+2$ din fiecare mod de scriere se mai obțin $n-2$ moduri deci în total $(n-3)! \cdot (n-2) = (n-2)!$.

Deci probabilitatea cerută este

$$p = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

32. *Într-un lot de* 1000 *de piese se știe că sînt* 2% *piese cu defecte. Se aleg la întîmplare* 100 *de piese pentru a fi controlate. Care este probabilitatea, ca printre piesele controlate cel puțin trei piese să fie cu defecte?*

SOLUȚIE. Din condițiile problemei rezultă că în lotul de 1000 de piese se găsesc 20 de piese cu defecte; probabilitatea ca să extragem o piesă cu defecte este $p = \frac{2}{100}$ iar probabilitatea ca să extragem o piesă fără defecte este $q = 1 - p = \frac{98}{100}$.

Dacă notăm cu A_k evenimentul că în cele 100 de piese extrase să găsim k piese cu defecte atunci

$$P(A_k) = C_{100}^k \left(\frac{2}{100}\right)^k \left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 20.$$

Probabilitatea ca cel puțin 3 piese să fie cu defecte este

$$P = P\left(\bigcup_{k=3}^{20} A_k\right) = \sum_{k=3}^{20} P(A_k) = \sum_{k=3}^{20} C_{100}^k \left(\frac{2}{100}\right)^k \left(\frac{98}{100}\right)^{100-k}.$$

33. *Într-o cameră întunecoasă se găsesc cinci perechi de pantofi. Se aleg la întîmplare cinci pantofi.*

a) *Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, în ipoteza că cele cinci perechi de pantofi sînt fiecare de același fel?*

b) *Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi aleși să fie cel puțin o pereche, în ipoteza că cele cinci perechi sînt de mărimi (culori) diferite?*

SOLUȚIE. a) Observăm mai întîi că evenimentele A „cu cei cinci pantofi aleși se poate forma cel puțin o pereche" și B „cu cei cinci pantofi aleși nu se poate forma nici o pereche" sînt complementare. Atunci

$$P(A) = 1 - P(B) \text{ iar } P(B) = \frac{2}{C_{10}^5},$$

întrucît numărul cazurilor posibile este dat de numărul de grupuri de cîte 5 pantofi ce se pot forma din totalul de 10 pantofi. Ca să nu pot forma o pereche cu cei cinci pantofi aleși trebuie ca ei să fie sau toți pentru piciorul stîng sau toți pentru piciorul drept, și avem deci două posibilități.

Urmează atunci că

$$P(A) = 1 - \frac{2}{C_{10}^5}.$$

b) Ca și în cazul a) calculăm mai întîi probabilitatea evenimentului B: ca să nu pot forma nici o pereche cu cei cinci pantofi aleși. Numărul cazurilor posibile este și de data aceasta dat de C_{10}^5.

Ca să aflăm numărul cazurilor favorabile procedăm în felul următor: știm că nu putem forma nici o pereche dacă cei cinci pantofi aleși sînt toți pentru piciorul drept, sau dacă patru sînt pentru piciorul drept însă de mărimi diferite și unul este pentru piciorul stîng, însă de cealaltă mărime, sau dacă 3 sînt pentru piciorul drept de mărimi diferite și doi pentru piciorul stîng, de celelalte două mărimi și diferite între ele etc.

Cu alte cuvinte, între cei cinci pantofi poate să nu apară nici un pantof stîng în C_5^5 grupe, să nu apară un pantof stîng în C_5^4 grupe, doi pantofi stîngi în C_5^3 grupe etc.

Deci numărul cazurilor favorabile este

$$C_5^5 + C_5^4 + C_5^3 + C_5^2 + C_5^1 + C_5^0 = 2^5,$$

de unde urmează

$$P(B) = \frac{2^5}{C_{10}^5}.$$

Dacă C este evenimentul ca cu cei cinci pantofi să formăm cel puțin o pereche, atunci

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2^5}{C_{10}^5}.$$

34. Problema lui Banach. *Un fumător își cumpără de odată două cutii de chibrituri și le bagă în buzunar. După aceea de fiecare dată cînd folosește un chibrit, îl scoate la întîmplare dintr-o cutie. După cîteva timp scoate o cutie și constată că este goală. Care este probabilitatea ca în a doua cutie să fie în acel moment k chibrituri, dacă la început ambele cutii aveau cîte n chibrituri?*

Folosind rezultatul problemei, să se deducă valoarea sumei

$$C_{2n}^{n} + 2\,C_{2n-1}^{n} + 2^2\,C_{2n-2}^{n} + \ldots + 2^n\,C_{n}^{n}.$$

SOLUȚIE. În momentul cînd persoana constată că o cutie este goală, în a doua cutie pot fi h chibrituri, $h = 0, 1, 2, \ldots, n$. Convenim să înlocuim cutia care s-a golit cu una plină și că vom continua experiența pînă ce am efectuat a $(2n + 1)$-a extracție, deoarece atunci cel puțin una din cutii va fi goală, inițial ele avînd $2n$ chibrituri. La un moment dat fumătorul a scos pentru prima dată al $(n + 1)$-lea chibrit dintr-o cutie și deci trebuie să aflăm probabilitatea ca din cea de a doua cutie să se fi extras $n - k$ chibrituri. Întrucît fiecare chibrit poate fi extras dintr-o cutie sau alta și în total fac $2n + 1$ extracții succesive, atunci numărul cazurilor posibile este dat de mulțimea aplicațiilor lui $1, 2, \ldots, 2n + 1$ în mulțimea cu două elemente deci este de 2^{2n+1}.

Favorabile sînt cazurile în care din primele $2n-k$ chibrituri extrase avem n chibrituri din prima cutie, $n-k$ din a doua cutie și al $(2n - k + 1)$-lea chibrit este scos tot din prima cutie. Numărul acestor cazuri este C_{2n-k}^{n}.

Cum rolul primei cutii îl poate juca oricare din cele două cutii rezultă că avem $2C_{2n-k}^{n}$ cazuri. Asociind aceste cazuri cu celelalte 2^k posibilități de extracție, în celelalte k extracții ce se mai pot face pînă la numărul de $2n + 1$ cînd ne oprim, găsim că numărul cazurilor favorabile este dat de

$$2^{k+1}\,C_{2n-k}^{n}.$$

Așadar probabilitatea cerută este

$$p_k = \frac{2^{k+1}\,C_{2n-k}^{n}}{2^{2n+1}}.$$

Cum k poate lua valorile $0, 1, 2, \ldots, n$ și $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$ rezultă că

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\,C_{2n-k}^{n} = 2^{2n+1},$$

care răspunde la a doua parte a problemei.

35. *La o casă de bilete stau la rînd $m + n$ cumpărători, m dintre ei avînd bancnote de 10 lei iar restul prezentînd bancnote de 5 lei. Știind că un bilet costă 5 lei și că înainte de vînzare nu există nici un ban în casă, se cere să se determine probabilitatea ca nici unul dintre cumpărători să nu aștepte restul.*

SOLUȚIE. Numărul cazurilor posibile este determinat de numărul de posibilități de așezare a celor m cumpărători ce posedă bancnote de 10 lei, întrucît ei sînt cei ce așteaptă restul.

Numărul total al acestor cazuri este C_{m+n}^{m}.

Acum să reprezentăm în plan aceste posibilități în felul următor: din punctul A_0 așezat în originea axelor xOy (fig. 1), să ducem un seg-

ment orizontal de lungime egală cu unu spre dreapta, dacă primul cumpărător are bancnotă de 5 lei, sau un segment de lungime egală cu unu vertical în sus, dacă primul cumpărător are bancnote de 10 lei și așa mai departe vom duce segmente orizontale sau verticale din punctul unde am rămas, după cum cumpărătorul respectiv are bancnote de 5 lei sau de 10 lei.

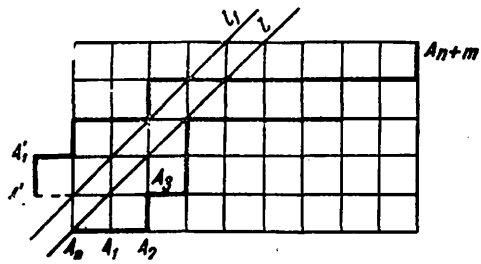


Fig. 1.

În felul acesta fiecăruia din cele C_{m+n}^{m} moduri posibile de așezare ale celor $m+n$ cumpărători îi corespunde o linie poligonală $A_0A_1A_2 \ldots A_{m+n}$ formată din n segmente orizontale și m segmente verticale, toate începînd cu A_0 și sfîrșind cu A_{m+n}.

Geometric, aceasta înseamnă că fiecare drum care reprezintă un caz favorabil trebuie să se afle sub bisectoarea sistemului de coordonate l, în particular primul segment ce pleacă din A_0 trebuie să fie orizontal.

Rezultă că orice drum care reprezintă un caz nefavorabil, trebuie să întîlnească bisectoarea l, sau ceea ce este același lucru, să aibă vîrfuri pe dreapta l_1 ce se obține prin translația dreptei l ca în fig. 1.

În cazul în care $m > n$, orice drum din figură ce ajunge la A_{m+n} are vîrfuri pe dreapta l_1, căci A_{m+n} este situat deasupra dreptei l și probabilitatea cerută este în acest caz nulă.

Fie acum $m \leqslant n$ și să numărăm drumurile care unesc pe A_0 cu A_{m+n} și au vîrfuri pe dreapta l_1. Observăm că numărul acestor drumuri coincide cu numărul drumurilor ce unesc pe A_0' cu A_{n+m} care sînt în număr de C_{m+n}^{m-1}, deoarece sînt toate drumurile care au $n+1$ orizontale și $m-1$ verticale.

Urmează atunci că probabilitatea cerută este

$$p = 1 - \frac{C_{n+m}^{m-1}}{C_{n+m}^{m}} = 1 - \frac{m}{n+1} = \frac{n-m+1}{n+1}.$$

36. *Doi jucători A și B sînt angrenați într-un concurs care constă din mai multe partide. Fiecare din partide poate fi cîștigată sau de jucătorul A cu probabilitatea p sau de jucătorul B cu probabilitatea* $q = 1 - p$. *Concursul ia sfîrșit cînd jucătorul A a cîștigat m partide sau cînd jucătorul B a cîștigat n partide.*

Să se afle probabilitatea ca acest concurs să fie cîștigat de jucătorul A la partida k.

SOLUȚIE. Din condițiile problemei rezultă că $m \leqslant k \leqslant m + n - 1$.

Pentru ca acest concurs să se termine la cea de a k partidă ieșind învingător jucătorul A, trebuie ca el să cîștige ultima partidă și alte $m - 1$ partide dintre cele $k - 1$ partide precedente.

Probabilitatea ca în $k - 1$ probe, un eveniment de probabilitate p să se producă de $m - 1$ ori, este

$$\frac{(k-1)!}{(m-1)!\,(k-m)!}\, p^{m-1} q^{k-m}.$$

Prin urmare probabilitatea ca jucătorul A să cîștige concursul la cea de a k partidă este

$$\frac{(k-1)!}{(m-1)!\,(k-m)!}\, p^{m} q^{k-m}.$$

Observație. Analog se află probabilitatea ca acest concurs să fie cîștigat de jucătorul B la cea de a k partidă și ea este dată de expresia

$$\frac{(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}\, p^{k-n} q^{n}.$$

Dacă se cere să se afle probabilitatea ca să ia sfîrșit concursul la cea de a k partidă indiferent cine cîștigă, atunci această probabilitate este dată de suma probabilităților aflate pentru jucătorul A și jucătorul B.

De asemenea putem afla valoarea medie a numărului de partide ce trebuie să aibă loc pentru ca să se termine concursul.

Acest număr este dat de

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{k!}{(m-1)!\,(k-m)!}\, p^{m} q^{k-m} + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{k!}{(n-1)!\,(k-n)!}\, p^{k-n} q^{n}.$$

37. *Doi jucători joacă alternativ un joc. Jucătorul A joacă partidele cu număr impar și fiecare partidă jucată o poate cîștiga cu probabilitatea p sau o poate pierde cu probabilitatea q.*

Jucătorul B joacă partidele cu număr par și fiecare partidă o poate cîștiga cu probabilitatea p' sau o poate pierde cu probabilitatea q'. Jocul ia sfîrșit cînd jucătorul A cîștigă m partide sau cînd jucătorul B cîștigă n partide.

Să se afle probabilitatea ca jocul să ia sfîrșit la cea de a $(2k + 1)$-a partidă și să fie cîștigat de jucătorul A.

SOLUȚIE. Pentru ca jocul să ia sfîrșit, la cea de a $(2k + 1)$-a partidă și să fie cîștigat de jucătorul A trebuie să aibă loc simultan următoarele evenimente:

A_1: jucătorul A trebuie să cîștige a $(2k + 1)$-a partidă;

A_2: jucătorul A trebuie să cîștige $m - 1$ partide din cele k partide jucate anterior $(k \geqslant m - 1)$;

A_3: jucătorul B trebuie să cîștige cel mult $n - 1$ partide din cele k jucate de el.

Se constată imediat că

$$P(A_1) = p;$$

$$P(A_2) = \frac{k!}{(m-1)!\,(k-m+1)!}\, p^{m-1} q^{k-m+1};$$

$$P(A_3) = \sum_{j=0}^{n-1} C_k^j p'^j q'^{k-j}.$$

De aici, ținînd cont că A_1, A_2, A_3 sînt evenimente independente, avem

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p \cdot \frac{k!}{(m-1)!\,(k-m+1)!}\, p^{m-1} q^{k-m+1} \sum_{j=0}^{n-1} C_k^j p'^j q'^{n-j}.$$

38. *Care este probabilitatea ca alegînd un număr natural n la întîmplare cubul său să fie terminat în 11.*

SOLUȚIE. Căutăm mai întîi să vedem cîte numere dintr-o sută, au cubul terminat în 11. Fie numărul

$$n = a_0 \cdot 10 + a_1; \quad a_0, a_1 = 0, 1, 2, \ldots, 9.$$

Atunci

$$n^3 = a_0^3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 a_0^2 a_1 + 3 \cdot 10 \cdot a_0 a_1^2 + a_1^3.$$

Se observă că ultimele două cifre sînt date de partea

$$3 \cdot 10 \cdot a_0 a_1^2 + a_1^3.$$

Pentru ca acest număr să se termine în 11, trebuie mai întîi ca $a_1 = 1$, apoi ca numărul $3 \cdot 10 \cdot a_0 + 1$ să fie terminat în 11 trebuie ca $a_0 = 7$. Prin urmare, din prima sută de numere naturale unul singur are cubul terminat în 11 și anume 71.

Dacă acum luăm un număr oarecare n, el se poate scrie în baza 10 astfel

$$n = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \cdot 10^{n-k} + a_{n-1} \cdot 10 + a_n,$$

unde

$$a_k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9; \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Notînd cu

$$A = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \cdot 10^{n-k} = 10^2 (a_0 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-2})$$

observăm că în relația

$$n^3 = A^3 + 3A^2(a_{n-1} \cdot 10 + a_n) + 3A(a_{n-1} \cdot 10 + a_n)^2 + (a_{n-1} \cdot 10 + a_n)^3$$

ultimele două cifre sînt date de expresia $(a_{n-1} \cdot 10 + a_n)^3$.

Deducem că numărul n^3 are cubul terminat în 11 dacă numărul format cu ultimele sale cifre are cubul terminat în 11 și deci probabilitatea cerută este

$$p = \frac{1}{100}.$$

39. *Un lift urcă cu k persoane într-o clădire cu n etaje. Care este probabilitatea ca la un etaj să coboare cel mult o persoană?*

Caz particular $n = 9$, $k = 5$.

SOLUȚIE. Vom presupune că toate modurile de grupare a persoanelor în lift sînt egal probabile. Acum vom distinge două cazuri: $n < k$ și $n \geqslant k$. Dacă $n < k$ probabilitatea ca la un etaj să coboare cel mult o persoană este nulă, întrucît numărul persoanelor depășește numărul etajelor și neapărat va trebui să coboare mai mult de o persoană la un etaj.

Dacă $n \geqslant k$ atunci numărul de cazuri posibile este dat de numărul aplicațiilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, k\}$ în mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ care este dat de n^k.

Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul aplicațiilor lui $\{1, 2, \ldots, k\}$ în $\{1, 2, \ldots, n\}$ în care fiecărui element din $\{1, 2, \ldots, k\}$ îi corespunde un singur element din $\{1, 2, \ldots, n\}$. Numărul acestor aplicații este dat de A_n^k.

Deci

$$p = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k > n, \\ \dfrac{A_n^k}{n^k} & \text{dacă } k \leqslant n. \end{cases}$$

În cazul particular $n = 9$, $k = 5$ obținem

$$p = \frac{A_9^5}{9^5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9^5} \simeq 0{,}256.$$

40. *O urnă conține n bile, numerotate de la 1 la n; se extrag succesiv bilele pînă ce urna rămîne goală. Spunem că avem coincidență, dacă la a k extracție bila extrasă poartă pe ea numărul k.*

Care este probabilitatea ca să nu avem nici o coincidență?

SOLUȚIE. Numărul de cazuri posibile este evident $n!$

Numărul de cazuri în care o bilă determinată nu apare la rangul respectiv este

$$n! - (n-1)!$$

Pentru a obține numărul de cazuri în care două bile determinate nu apar la rangurile respective, scădem din expresia de mai înainte numărul de cazuri în care două bile apar la rangul lor, adică scădem

$$(n-1)! - (n-2)!$$

Așadar numărul de cazuri în care două bile determinate nu sînt nici una nici alta la rangul lor este

$$n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

Analog găsim numărul de cazuri în care trei bile determinate nu apar la rangul lor ca fiind

$$n! - 2(n-1)! + (n-2)! - [(n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!] =$$
$$= n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$$

Continuînd raționamentul se vede imediat că numărul cazurilor în care h bile determinate nu apar la rangul lor este

$$n! - h(n-1)! + \frac{h(h-1)}{2!}(n-2)! + \ldots + (-1)^h (n-h)!$$

Rezultă acum că probabilitatea ca nici o bilă să nu apară la rangul ei este

$$P_n = \frac{n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! + \cdots + (-1)^n C_n^n (n-n)!}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Se constată imediat că

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-1}.$$

Pentru $n = 9$ obținem

$$P_9 = 0{,}3678792$$

în care

$$e^{-1} = 0{,}36787944 \ldots$$

deci $\lim_{n\to\infty} P_n$ diferă de P_9 cu mai puțin de 10^{-6}.

Acest lucru ne permite să afirmăm că pentru valori ale lui $n > 9$, probabilitatea P_n este sensibil independentă de n.

41. *Doi trăgători A și B trag asupra unei ținte în aceleași condiții. Probabilitățile obținerii punctelor* 0, 1, 2, ..., 10 *pentru fiecare trăgător sînt date de tabela :*

Numărul de puncte realizate	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilitățile pentru trăgătorul *A*	0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,1	0,09	0,05	0,03
Probabilitățile pentru trăgătorul *B*	0,01	0,01	0,04	0,1	0,25	0,3	0,18	0,05	0,03	0,02	0,01

Să se decidă care trăgător este mai bun.

SOLUȚIE. Pentru a vedea care trăgător este mai bun vom calcula numărul mediu de puncte realizate dintr-o dată pentru fiecare dintre trăgătorii A și B.

Dacă notăm cu M_A și M_B valoarea medie pentru trăgătorul A respectiv B, avem

$$M_A = 0{,}02 \cdot 0 + 0{,}03 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}15 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 5 + \\ + 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 7 + 0{,}09 \cdot 8 + 0{,}05 \cdot 9 + 0{,}03 \cdot 10 = 5{,}24;$$

$$M_B = 0{,}01 \cdot 0 + 0{,}01 \cdot 1 + 0{,}04 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}25 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 5 + \\ + 0{,}18 \cdot 6 + 0{,}05 \cdot 7 + 0{,}03 \cdot 8 + 0{,}02 \cdot 9 + 0{,}01 \cdot 10 = 4{,}84.$$

Cum $M_A > M_B$ tragem concluzia că trăgătorul A este mai bun decît trăgătorul B.

42. *Să se găsească probabilitatea ca un număr natural mai mic sau egal cu* 1 000, *luat la întîmplare, să fie puterea întreagă (cu exponent mai mare decît* 1) *a unui alt număr natural.*

SOLUȚIE. Prin cuvîntul „la întîmplare" vom înțelege că apariția oricărui număr de la 1 pînă la 1 000 este considerată egal probabilă. Căutăm acum printre cele 1 000 de numere între 1 și 1 000 puteri ale lui 2. Aceste numere sînt : 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9. Probabilitatea ca numărul să fie o putere întreagă a lui 2 este $\frac{8}{1\,000}$.

În mod analog probabilitatea ca numărul căutat să fie o putere întreagă a lui 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31, (dacă numărul ar fi putere întreagă a lui 4, 8, 9, 16, 25 sau 27, atunci el ar fi și o putere întreagă a unui număr mai mic și de aceea nu mai luăm în considerație aceste numere) este respectiv

$$\frac{5}{1\,000}, \frac{3}{1\,000}, \frac{2}{1\,000}, \frac{2}{1\,000}, \frac{1}{1\,000}, \ldots, \frac{1}{1\,000}.$$

Considerațiile acestea sînt valabile deoarece

$$2^9 < 1\,000 < 2^{10}, \quad 3^6 < 1\,000 < 3^7; \quad 5^4 < 1\,000 < 5^5,$$

$$6^3 < 1\,000 < 6^4; \quad 7^3 < 1\,000 < 7^4, \quad 10^3 = 1\,000 < 10^4,$$

$$11^2 < 1\,000 < 11^3; \quad 12^2 < 1\,000 < 12^3, \ldots, 31^2 < 1\,000 < 31^3.$$

Cum evenimentele acestea sînt incompatibile două cîte două probabilitatea căutată va fi

$$p = \frac{8}{1\,000} + \frac{5}{1\,000} + \frac{3}{1\,000} + 3 \cdot \frac{2}{1\,000} + 18\,\frac{1}{1\,000} = \frac{40}{1\,000} = \frac{1}{25}.$$

43. *Să se arate că*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

SOLUȚIE. Am văzut că

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Să notăm $A_1 \cup A_2 = B$. Atunci

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(B) + P(A_3) - P(B \cap A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(B \cap A_3).$$

Însă

$$P(B \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] = P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Din relațiile de mai înainte rezultă egalitatea propusă.

44. *Să se arate că probabilitatea că dintre evenimentele A_1, A_2, A_3 să se verifice două oricare ar fi acestea, pe care s-o notăm cu $P_2(A_1, A_2, A_3)$ este dată de*

$$P_2(A_1, A_2, A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

SOLUȚIE. Avem

$$P_2(A_1, A_2, A_3) = P[(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3)] = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3).$$

Cum însă

$$A_1 \cap A_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$$

rezultă că

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c)$$

de unde

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Analog

$$P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3),$$

$$P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Din relațiile de mai înainte rezultă că

$$P_2(A_1, A_2, A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

45. *Se consideră n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ fiecare conținînd bile albe și negre într-o anumită proporție. Știind că probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_i este p_i iar probabilitatea de a extrage o bilă neagră este $q_i = 1 - p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, să se determine probabilitatea de a avea cel puțin o bilă albă în ipoteza că extragem pe rînd din fiecare urnă cîte o bilă.*

SOLUȚIE. Fie A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, evenimentul de a extrage o bilă albă din urna U_i și B_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, evenimentul de a extrage o bilă neagră.

Fie A evenimentul de a obține cel puțin o bilă albă în extracțiile făcute. Atunci

$$A^c = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_n,$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) =$$

$$= 1 - P(B_1)\, P(B_2) \ldots P(B_n)$$

căci evenimentele B_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sînt independente în totalitatea lor.

Cum

$$P(B_i) = q_i, \; 1 \leqslant i \leqslant n,$$

rezultă că avem

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = 1 - 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i<j} p_i p_j +$$

$$+ \sum_{i<j<k} p_i p_j p_k + \ldots + (-1)^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Deci

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i<j} p_i p_j + \sum_{i<j<k} p_i p_j p_k + \ldots + (-1)^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Observație. Formula găsită este un caz particular (cînd evenimentele sînt independente în totalitatea lor) al relației care ne dă soluția problemei următoare.

46. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n evenimente cu $P(A_i) = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Să se determine probabilitatea realizării cel puțin a unui eveniment A_i.*

SOLUȚIE. Fie A evenimentul care constă în realizarea cel puțin a unui eveniment A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Atunci

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

și

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \tag{1}$$

Formula (1) o demonstrăm prin inducție. Ea este adevărată pentru $n = 2$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - (A_1 \cap A_2)), \quad A_1 \cap (A_2 - (A_1 \cap A_2)) = \varnothing,$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2),$$

căci

$$A_1 \cap A_2 \subset A_2 \text{ și deci } P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Să presupunem formula (1) adevărată pentru n și să arătăm că se păstrează pentru $n + 1$.

Într-adevăr

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) +$$

$$+ P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) +$$

$$+ \ldots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=r \\ i<j}}^{n+1} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^n \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right).$$

47. *O societate compusă din n perechi — soț și soție — dansează și se presupune că formarea perechilor la dans este egal probabilă. Care este probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soția sa? Să se calculeze limita acestei probabilități cînd n tinde către infinit.*

SOLUȚIE. Să numerotăm perechile — soț și soție — de la 1 la n și să notăm cu A_k evenimentul că s-a format perechea k — soț și soție.

Atunci

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

deoarece dacă s-au format k perechi — soț și soție, atunci celelalte $n - k$ perechi — bărbat femeie — pot forma $(n - k)!$ perechi de dans.

Evenimentele A „la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soția sa" și B „la un moment dat cel puțin un bărbat dansează cu soția *sa*" sînt complementare.

Deci

$$P(A) = 1 - P(B).$$

Cum $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ iar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt evenimente compatibile, avem

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Cum formarea perechilor la dans este egal probabilă, avem

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots i_k=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_k}}^{n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!}$$

și deci

$$P(B) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Urmează atunci că

$$P(A) = 1 - C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} + C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} - C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

De aici deducem că

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}.$$

48. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n evenimente compatibile.*

a) *Să se determine probabilitatea ca unul singur, indiferent care dintre cele n evenimente, să se verifice.*

b) *Să se determine probabilitatea ca r evenimente, indiferent care dintre cele n evenimente să se verifice.*

SOLUȚIE. Să determinăm probabilitatea ca să se verifice numai evenimentul A_1. Asta înseamnă că se verifică evenimentul A_1 și nu se verifică $A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Avem în acest caz

$$p'_1 = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \ldots \cap A_n^c) = P\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j^c\right)\right).$$

Cum pe A_1 îl putem exprima în felul următor :

$$A_1 = A_1 \cap \Omega = A_1 \cap \left[\left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j^c\right) \cup \left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j^c\right)^c\right] =$$

$$= \left[A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j^c\right)\right] \cup \left[A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right],$$

deducem că

$$P(A_1) = p_1 = P\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j^c\right)\right) + P\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right) =$$

$$= p'_1 + P\left(\bigcup_{j=2}^{n} (A_1 \cap A_j)\right) = p'_1 + \sum_{j=2}^{n} P(A_1 \cap A_j) - \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{j_2, j_3, \ldots j_n \\ j_2 < j_3 < \ldots < j_n}} P(A_1 \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_n}) =$$

$$= p'_1 + \sum_{j=2}^{n} p_{1j} - \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} p_{1jk} + \ldots + (-1)^{n-2} p_{12\ldots n}.$$

De unde urmează că

$$p'_1 = p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_{1j} + \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} p_{1jk} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}.$$

La fel putem calcula p'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ și vom avea

$$p'_i = p_i - \sum_{j \neq i}^{n} p_{ij} + \sum_{\substack{j,k \neq i \\ j<k}}^{n} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

De aici deducem că probabilitatea ca unul singur dintre evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ indiferent care, se obține sumînd relația de mai înainte și deci

$$P^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} + 3 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-1} n p_{12\ldots n}.$$

b) Să aflăm mai întîi probabilitatea ca să se verifice numai A_1 și A_2. Atunci

$$p'_{12} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap \ldots \cap A_n^c) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{j=3}^{n} A_3^c\right)\right).$$

Printr-un raționament analog cu cel de la punctul (a) găsim că

$$p_{12} = P(A_1 \cap A_2) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{j=3}^{n} A_j^c\right)\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcup_{j=3}^{n} A_j\right)\right) =$$

$$= p'_{12} + \sum_{j=3}^{n} p_{12j} - \sum_{\substack{j,k=3 \\ j<k}}^{n} p_{12jk} + \ldots + (-1)^{n-3} p_{12\ldots n}$$

și deci

$$p'_{12} = p_{12} - \sum_{j=3}^{n} p_{12j} + \sum_{\substack{j,k=3 \\ j<k}}^{n} p_{12jk} + \ldots + (-1)^{n-2} p_{12\ldots n}$$

Ca să aflăm acum probabilitatea ca numai două dintre cele n evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ indiferent care, sumăm relația obținută scrisă pentru p'_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$ și obținem

$$P^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p'_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} - C_3^2 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_{ijk} + C_4^2 \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i<j<k<l}}^{n} p_{ijkl} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-2} C_n^2 p_{12\ldots n}$$

Repetînd punct cu punct raționamentul făcut pentru cazul acesta particular cînd $r = 2$, obținem

$$P^{(r)} = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_r=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_r}}^{n} p'_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_r=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_r}}^{n} p_{i_1 i_2 \ldots i_r} - C_{r+1}^r \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_{r+1}=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_{r+1}}}^{n} p_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} +$$

$$+ C_{r+2}^r \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_{r+2}=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_{r+2}}}^{n} p_{i_1 i_2 \ldots i_{r+2}} + \ldots + (-1)^{n-r} C_n^r p_{12\ldots n}$$

49. *Fiind date evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să se determine probabilitatea ca să se realizeze cel puțin r dintre ele.*

SOLUȚIE. Folosind notațiile

$$\sum_{i_1=1}^{n} p_{i_1} = T_1; \quad \sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_1<i_2}}^{n} p_{i_1 i_2} = T_2; \ldots; \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_n}}^{n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = T_n$$

din exercițiul precedent rezultă că avem

$$P^{(r)} = T_r - C_{r+1}^r T_{r+1} + C_{r+2}^2 T_{r+2} + \ldots + (-1)^{n-r} C_n^r T_n,$$

$$P^{(r+1)} = T_{r+1} - C_{r+2}^{r+1} T_{r+2} + \ldots + (-1)^{n-r-1} C_n^{r+1} T_n,$$

. . . . . .

$$P^{(n-1)} = T_{n-1} - C_n^{n-1} T_n,$$

$$P^{(n)} = T_n,$$

unde prin $P^{(r)}$ am notat probabilitatea ca să se verifice numai r evenimente, indiferent care dintre cele n.

Deoarece evenimentele care au probabilitățile $P^{(r)}$, $P^{(r+1)}$, $P^{(r+2)}$, ..., $P^{(n)}$ sînt incompatibile, rezultă că, notînd cu P_r probabilitatea de a se realiza cel puțin r evenimente, avem

$$P_r = P^{(r)} + P^{(r+1)} + \ldots + P^{(n-1)} + P^{(n)}.$$

Cu notațiile de mai înainte avem încă

$$P_r = T_r - [C_{r+1}^r - 1]\, T_{r+1} + [C_{r+2}^r - C_{r+2}^{r+1} + 1]\, T_{r+2} + \ldots + \\ + (-1)^{n-r} [C_n^r - C_n^{r+1} + \ldots + (-1)^{n-r}]\, T_n.$$

Dacă acum folosim unele proprietăți binecunoscute ale combinărilor ajungem la formula

$$P_r = T_r - C_r^1 T_{r+1} + \ldots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n.$$

50. *Să presupunem că avem un grup de n indivizi de vîrste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv. Se cere să se determine* :

a) *probabilitatea ca după trecerea unui an, cel puțin unul dintre cei n indivizi să fie în viață* ;

b) *probabilitatea ca după trecerea unui an, cel puțin r persoane să fie în viață.*

SOLUȚIE. a) Să notăm cu E_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, evenimentul că persoana de vîrstă x_k este în viață după trecerea unui an și cu $p_k = P(E_k)$, $1 \leqslant \leqslant k \leqslant n$.

Se observă că evenimentele E_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sînt compatibile și independente și atunci, dacă notăm cu P_1 probabilitatea evenimentului că după trecerea unui an, cel puțin unul din cei n indivizi să fie în viață, avem

$$P_1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(E_i \cap E_j) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_i p_j p_k - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Dacă introducem notațiile

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i,\ T_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_i p_j,\ \ldots,\ T_n = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_n=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_n}}^{n} p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n}$$

atunci

$$P = T_1 - T_2 + T_3 - \ldots + (-1)^{n-1} T_n.$$

b) Probabilitatea ca după trecerea unui an, cel puțin r persoane să fie în viață este dată de formula finală a exercițiului precedent

$$P_r = T_r - C_r^1 T_{r+1} + \ldots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n .$$

51. *O urnă conține* 12 *bile numerotate de la* 1 la 12. *Să se determine probabilitatea ca bilele numerotate* 5, 7, 11 *să iasă la extracțiile de rangul* 5, 7, 11.

SOLUȚIE. Numărul cazurilor posibile este dat de 12 ! care reprezintă toate modurile posibile de extragere a bilelor din urnă.

Numărul cazurilor favorabile este dat de 9 ! care este numărul de moduri în care putem extrage cele 12 bile avînd fixat de fiecare dată bilele cu numerele 5, 7, 11 pe locul 5, 7, 11 respectiv.

Deci

$$p = \frac{9!}{12!} = \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12} .$$

52. *În problema precedentă să se calculeze probabilitatea ca cel puțin două dintre bilele numerotate* 5, 7, 11 *să iasă la extracțiile respective.*

SOLUȚIE. Aplicăm formula generală din problema concordanțelor, pentru a afla probabilitatea P_r ca cel puțin r evenimente să se verifice :

$$P_r = T_r - C_r^1 T_{r+1} + \ldots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n .$$

În cazul nostru $n = 3$, $r = 2$, și deci formula devine

$$P_2 = T_2 - C_2^1 T_3$$

cu

$$T_2 = \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1,2,3}} p_{ij} ; \quad T_3 = \sum_{\substack{i<j<k \\ i,j,k=1,2,3}} p_{ijk} .$$

Deci

$$T_2 = p_{12} + p_{13} + p_{23} ; \quad T_3 = p_{123} ,$$

unde prin p_{12} înțelegem probabilitatea ca să avem concordanța 5, 7 ; p_{13} probabilitatea concordanței 5, 11 ; p_{23} probabilitatea concordanței 7, 11 iar p_{123} probabilitatea concordanței 5, 7, 11.

$$\text{Cum } p_{12} = p_{13} = p_{23} = \frac{1}{11 \cdot 12} \text{ iar } p_{123} = \frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12}$$

rezultă că

$$P_2 = \frac{3}{11 \cdot 12} - 2\frac{1}{10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1}{11 \cdot 12}\left(3 - \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5 \cdot 11 \cdot 6} .$$

53. *Într-o țintă trag simultan în condiții identice n trăgători numerotați de 1 la n, fiecare din trăgători avînd probabilitatea de a nimeri ținta, egală respectiv cu* p_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. *Să se afle*:

a) *probabilitatea ca ținta să fie atinsă*;

b) *probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin* 3 *trăgători.*

SOLUȚIE. a) Ținta este atinsă cînd cel puțin un trăgător o nimerește. Evenimentele A „cel puțin un trăgător nimerește ținta" și B „nici un trăgător nu nimerește ținta" sînt complementare.

Dar

$$P(B) = \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j)$$

căci trăgătorii nimeresc ținta independent unul de altul.

Atunci

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j).$$

Observații 1. Dacă $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, atunci $P(A) = A - (1 - p)^n$.

2. La același rezultat se poate ajunge folosind formula lui Poincaré

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j<k=1}^{n} p_j p_k + \ldots + (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n} p_j,$$

unde A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, este evenimentul care constă în faptul ca trăgătorul cu numărul j să nimerească ținta (se observă că evenimentele A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, sînt compatibile).

b) Pentru cazul acesta avem

$$P_3 = S_3 - C_{3+1}^1 S_{3+1} + C_{3+2}^2 S_{3+2} + \ldots + (-1)^{n-3} C_n^{n-3} S_n.$$

unde

$$S_k = \sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}. \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

54. *Un țintaș nimerește de* 7 *ori din* 9 *trageri. Să se calculeze probabilitatea ca el să nimerească ținta de* 8 *ori consecutiv.*

SOLUȚIE. Probabilitatea ca să nimerească ținta într-o singură tragere este $\frac{7}{9}$. De aici urmează că probabilitatea ca țintașul să nimerească de 8 ori consecutiv este

$$P_8(8, 0) = \left(\frac{7}{9}\right)^8,$$

unde $P_8(8, 0)$ are semnificația notației de la urna lui Bernoulli.

55. *Trăgătorul A nimerește ținta de* 8 *ori din* 11 *trageri, iar B de* 9 *ori din* 10 *trageri. Dacă trag simultan în aceeași țintă, care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă?*

SOLUȚIE. Fie A_1 evenimentul ca A să nimerească ținta și A_2 evenimentul ca B să nimerească ținta.

Se vede că evenimentele A_1 și A_2 sînt compatibile între ele însă independente. Urmează de aici că probabilitatea ca ținta să fie atinsă este

$$p = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\,P(A_2).$$

Cum $P(A_1) = \frac{8}{11}$; $P(A_2) = \frac{9}{10}$; Urmează că

$$p = \frac{8}{11} + \frac{9}{10} - \frac{8}{11} \cdot \frac{9}{10}.$$

56. *Fie A și B două evenimente, definite pe un cîmp de probabilitate. În funcție de $P(A)$, $P(B)$ și $P(A \cap B)$ să se determine:*

a) *probabilitatea ca să se producă exact k, $k = 0, 1, 2$ dintre evenimentele A și B;*

b) *probabilitatea ca să se producă cel puțin k evenimente, $k = 0, 1, 2$:*

c) *probabilitatea ca să se producă cel mult k evenimente;*

d) *probabilitatea ca să se producă evenimentul A și să nu se producă evenimentul B.*

SOLUȚIE. a) Introducem următoarea notație:

P(ca să se producă exact k evenimente) $= P$ (exact k), $k = 0, 1, 2$.

Atunci

$$P(\text{exact } 0) = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B)$$

întrucît

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B),$$

$$P(\text{exact } 1) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B),$$

deoarece

$$P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B),$$

$$P(\text{exact } 2) = P(A \cap B).$$

b) $P(\text{cel puțin } 0) = 1$,

$$P(\text{cel puțin } 1) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(\text{cel puțin } 2) = P(A \cap B).$$

c) $P(\text{cel mult } 0) = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B)$,

$$P(\text{cel mult } 1) = 1 - P(A \cap B),$$

$$P(\text{cel mult } 2) = 1,$$

d) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

57. *Un număr este ales la întîmplare în intervalul* [0, 1] *de un mecanism aleator, care urmează o lege uniformă în acest interval. Care este probabilitatea ca cea de-a doua zecimală a numărului ales să fie egală cu* $\sqrt{k}$ *? dar cu* $\sqrt{3}$?

SOLUȚIE. Să notăm cu B_k mulțimea numerelor din intervalul [0, 1] care au a doua zecimală egală cu $\sqrt{k}$. Atunci un număr $x \in B_k$, dacă și numai dacă $\sqrt{x}$ satisface pentru orice $m = 0, 1, \ldots, 9$ următoarea inegalitate :

$$m + \frac{k}{10} \leqslant 10\sqrt{x} < m + \frac{k+1}{10}$$

sau

$$\frac{1}{100}\left(m + \frac{k}{10}\right)^2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{100}\left(m + \frac{k+1}{10}\right)^2.$$

Lungimea intervalului de mai înainte este egală cu

$$\frac{1}{100}\left(m + \frac{k+1}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}\left(m + \frac{k}{10}\right)^2 = \frac{1}{10\,000}(20m + 2k + 1)$$

atunci

$$P(B_k) = \frac{1}{10\,000}\sum_{m=0}^{9}(20m + 2k + 1) = 0{,}091 + 0{,}002k.$$

În particular

$$P(B_3) = \frac{1}{10\,000}\sum_{m=0}^{9}(20m + 7).$$

Făcînd calculele obținem

$$P(B_3) = 0{,}097.$$

58. *Într-o uzină se fabrică lămpi cu incandescență. La aceste lămpi întîlnim* 2% *defecte de fabricație și* 5% *defecte de montaj.*

Să se calculeze probabilitatea ca o lampă să fie înlăturată ca necorespunzătoare.

SOLUȚIE. Fie A evenimentul care constă în faptul că o lampă să fie eliminată datorită unui defect de fabricație și B evenimentul că ea să fie eliminată datorită unui defect de montaj.

Probabilitatea care ne interesează este probabilitatea evenimentului $A \cup B$. Cum A și B sînt evenimente compatibile avem

$$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cum A și B sînt evenimente independente rezultă că avem

$$p = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B),$$
$$P(A) = 0{,}02;\ P(B) = 0{,}05,\ P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0{,}001,$$
$$P = 0{,}02 + 0{,}05 - 0{,}001 = 0{,}069 = 6{,}9\%.$$

59. *Se dau probabilitățile* $P_D(A)$, $P_{A\cap D}(B)$ *și* $P_{A\cap B\cap D}(C)$. *Se cere să se determine în funcție de probabilitățile de mai înainte.*

$$P_D(A \cap B \cap C).$$

SOLUȚIE. Să arătăm că

$$P_D(A \cap B \cap C) = P_D(A) \cdot P_{A\cap D}(B) \cdot P_{A\cap B\cap D}(C).$$

Avem

$$P_D(A \cap B \cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C\cap D)}{P(D)}.$$

Însă

$$P(D \cap A \cap B \cap C) = P(D) \cdot P_D(A) \cdot P_{A\cap D}(B) \cdot P_{A\cap B\cap D}(C)$$

deoarece

$$P(D) \cdot P_D(A) \cdot P_{A\cap D}(B) \cdot P_{A\cap B\cap D}(C) =$$

$$= P(D) \cdot \frac{P(A\cap D)}{P(D)} \cdot \frac{P(A\cap B\cap D)}{P(A\cap D)} \cdot \frac{P(A\cap B\cap C\cap D)}{P(A\cap B\cap D)} = P(A\cap B\cap C\cap D)$$

și deci

$$P_D(A \cap B \cap C) = P_D(A) \cdot P_{A\cap D}(B) \cdot P_{A\cap B\cap D}(C).$$

60. *Se dă*

$$P_B(A) = \frac{7}{10}, \quad P_{B^c}(A) = \frac{3}{10}, P_A(B) = \frac{6}{10}.$$

Să se determine $P(A)$.

SOLUȚIE. Din definiția probabilității condiționate avem

$$P(A)\, P_A(B) = P(B)\, P_B(A)$$

și

$$P(A)\ P_A(B^c) = P(B^c)\ P_{B^c}(A).$$

Din cele două egalități rezultă că

$$P(A) = \frac{P(B)P_B(A)}{P_A(B)} = \frac{P(B^c)P_{B^c}(A)}{P_A(B^c)}.$$

Însă

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

și

$$P_A(B) + P_A(B^c) = 1.$$

Atunci

$$P(A) = \frac{7}{6} P(B) \text{ și } P(A) = \frac{3}{4}(1 - P(B)),$$

întrucît

$$P_A(B^c) = \frac{4}{10}.$$

Însfîrșit obținem că

$$P(B) = \frac{9}{23} \text{ iar } P(A) = \frac{21}{46}.$$

61. *Să se arate că pentru orice două evenimente A și B, cu $P(A) > 0$, avem*

$$P(B) = P_A(B)\ P(A) + P_{A^c}(B)\ P(A^c).$$

SOLUȚIE. Din definiția probabilității condiționate avem

$$P(A \cap B) = P(A)\ P_A(B).$$

Analog, avem

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)\ P_{A^c}(B).$$

Însă

$$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B$$

și

$$(A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \varnothing.$$

Atunci

$$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B).$$

Ținînd seama de primele relații obținem

$$P(B) = P_A(B)\ P(A) + P_{A^c}(B)\ P(A^c).$$

62. *Să se arate că*

$$P_C(A \cup B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(A \cap B)$$

dacă $P(C) \neq 0$.

SOLUȚIE. Avem

$$P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

și împărțind cu $P(C)$ se obține

$$P_C(A \cup B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(A \cap B).$$

63. *Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma fețelor să fie 6, știind că suma acestor fețe a dat un număr cu soț?*

SOLUȚIE. Cu ajutorul relației care ne dă probabilitatea ca fiind raportul dintre numărul cazurilor favorabile pe numărul cazurilor posibile avem

$$P_A(B) = \frac{5}{18},$$

unde am notat cu A evenimentul ca la aruncarea celor două zaruri suma fețelor să fie cu soț, iar prin B evenimentul ca suma fețelor să fie 6.

Același rezultat îl găsim și astfel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}.$$

64. *Se dau șase urne cu următoarele structuri :*
două urne conțin cîte 2 bile albe și 4 negre ;
trei urne conțin cîte 2 bile albe și 8 negre ;
o urnă conține 6 bile albe și 2 negre.

Se extrage la întîmplare o bilă dintr-una din urne și se cere să se calculeze :

a) *probabilitatea ca bila extrasă să fie albă ;*

b) *probabilitatea ca bila albă extrasă să aparțină uneia din structurile de urne date.*

SOLUȚIE. a) Să notăm :

A evenimentul care constă în extragerea unei bile albe ;

A_1 evenimentul care constă în extragerea unei bile din una din cele două urne, cu structura 2 bile albe și 4 negre ;

A_2 evenimentul care constă în extragerea unei bile din una din cele trei urne cu structura 2 bile albe și 8 negre ;

A_3 evenimentul care constă în extragerea unei bile din urna cu structura 6 bile albe și 2 negre.

Atunci evenimentul A îl putem scrie astfel

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup (A \cap A_3)$$

de unde urmează că, dacă folosim definiția probabilității condiționate,

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) =$$
$$= P(A_1)\, P_{A_1}(A) + P(A_2)\, P_{A_2}(A) + P(A_3)\, P_{A_3}(A).$$

Cum

$$P(A_1) = \frac{2}{6}; \quad P(A_2) = \frac{3}{6}, \quad P(A_3) = \frac{1}{6},$$

$$P_{A_1}(A) = \frac{2}{6}, \quad P_{A_2}(A) = \frac{2}{10}; \quad P_{A_3}(A) = \frac{6}{8},$$

urmează imediat că

$$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{121}{360}.$$

b) Probabilitatea ca bila albă să fie extrasă din prima structură este

$$P_A(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{121}{360}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{360}{121} = \frac{40}{121}.$$

Ca să aparțină celei de a doua structuri, este

$$P_A(A_2) = \frac{P(A_2)P_{A_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{121}{360}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{360}{121} = \frac{36}{121}.$$

Ca să aparțină celei de a treia structuri, este

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3)P_{A_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{121}{360}} = \frac{360}{121} \cdot \frac{1}{8} = \frac{45}{121}.$$

65. *Două clase A și B cu cîte* 30 *elevi au, respectiv cîte* 15 *elevi buni,* 10 *mediocri,* 5 *slabi și* 10 *buni,* 12 *mediocri,* 8 *slabi. Un profesor ascultă la întîmplare cîte un elev din fiecare clasă, și premiază clasa al cărei elev se dovedește mai bun. Se cere să se calculeze* :

a) *probabilitatea ca să fie premiată clasa A* ;

b) *probabilitatea ca să fie premiată clasa B.*

SOLUȚIE. a) Profesorul ascultînd la întîmplare un elev din clasa A și un elev din clasa B se vede că avem

$$15 \cdot 20 + 10 \cdot 8 = 380,$$

posibilități în care elevul din clasa A este mai bun ca un elev din clasa B, întrucît aceasta se întîmplă cînd este ascultat un elev din cei 15 buni din clasa A și un elev din cei 20 mediocri și slabi din clasa B sau cînd este ascultat un elev din cei 10 mediocri din clasa A și un elev din cei 8 slabi din clasa B.

Analog avem

$$10 \cdot 15 + 12 \cdot 5 = 210$$

în care elevul din clasa B este mai bun decît cel din clasa A.

Cum probabilitatea ca un elev să fie luat dintr-o clasă sau alta este $\frac{1}{2}$, prin aplicarea formulei lui Bayes găsim

$$P = \frac{\frac{1}{20} \cdot 380}{\frac{1}{2} \cdot 380 + \frac{1}{2} \cdot 210} = \frac{38}{59}.$$

b) Ca și la punctul a), probabilitatea ca să fie premiată clasa B este

$$Q = \frac{\frac{1}{2} \cdot 210}{\frac{1}{2} 380 + \frac{1}{2} \cdot 210} = \frac{21}{59}.$$

66. *Două urne identic construite conțin: una* 30 *bile, dintre care* 18 *bile albe, iar cealaltă* 21, *dintre care* 7 *bile albe. Se extrage o bilă la întîmplare din una dintre urne. Să se determine probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.*

SOLUȚIE. Fie A evenimentul de a extrage o bilă albă, A_1 evenimentul ca să extragem din urna U_1 și A_2 evenimentul de a extrage din urna U_2. Atunci putem scrie

$$A = A \cap (A_1 \cup A_2) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$$

de unde urmează că

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2)$$

întrucît evenimentele $(A \cap A_1)$ și $(A \cap A_2)$ sînt incompatibile. Folosind probabilitățile condiționate putem scrie

$$P(A) = P(A_1)\, P_{A_1}(A) + P(A_2)\, P_{A_2}(A).$$

Întrucît urnele sînt identic construite putem presupune că

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2},$$

iar

$$P_{A_1}(A) = \frac{18}{30}; \quad P_{A_2}(A) = \frac{7}{21}.$$

Deci

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{21}.$$

67. *Tragerea de pe un avion contra altui avion poate să se producă de la distanțele*: 600, 400 și 200 m. *Probabilitatea ca tragerea să se producă la distanța de* 600 m *este* 0,2; *la distanța de* 400 m *este* 0,3, *la* 200 m *este* 0,5.

Probabilitatea doborîrii avionului inamic la distanța de 600 m *este* 0,1; *la distanța de* 400 m *este* 0,2 *și la distanța de* 200 m *este* 0,4.

Se efectuează tragerea al cărei efect este doborîrea avionului. Să se găsească probabilitatea ca tragerea să se fi produs la distanța de 200 m.

SOLUȚIE. Avem de considerat ipotezele:

A_1 tragerea se produce la distanța de 600 m;

A_2 tragerea se produce la distanța de 400 m;

A_3 tragerea se produce la distanța de 200 m. Ele au probabilitățile

$$P(A_1) = 0{,}2; \quad P(A_2) = 0{,}3; \quad P(A_3) = 0{,}5.$$

Fie A evenimentul ce constă în doborîrea avionului inamic. Avem

$$P_{A_1}(A) = 0{,}1; \quad P_{A_2}(A) = 0{,}2; \quad P_{A_3}(A) = 0{,}4.$$

Se știe că

$$P_A(A_i) = \frac{P(A_i)\, P_{A_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(A)}, \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

de unde

$$P_A(A_3) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{(0{,}2)\,(0{,}1) + (0{,}3)\,(0{,}2) + (0{,}5)\,(0{,}4)} \simeq 0{,}715.$$

68. *Doi arcași trag asupra unei ținte, cîte o săgeată. Probabilitatea ca primul arcaș să lovească ținta este* 0,8, *iar pentru al doilea arcaș* 0,4. *După tragere, în țintă se găsește o singură săgeată. Să se găsească probabilitatea ca săgeata din țintă să aparțină primului arcaș.*

SOLUȚIE. Fie evenimentele :

A lovirea țintei de un singur arcaș ;

A_1 nici primul, nici al doilea arcaș nu lovește ținta ;

A_2 amîndoi arcașii lovesc ținta ;

A_3 primul arcaș lovește ținta, al doilea nu ;

A_4 primul arcaș nu lovește ținta, al doilea da ;

Probabilitățile evenimentelor A_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$ sînt

$$P(A_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12;$$
$$P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32;$$
$$P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48;$$
$$P(A_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$$

deoarece tragerile sînt independente.

Probabilitățile evenimentului A condiționate de evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 sînt

$$P_{A_1}(A) = 0; \quad P_{A_2}(A) = 0; \quad P_{A_3}(A) = P_{A_4}(A) = 1.$$

Teorema lui Bayes dă

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3)\, P_{A_3}(A)}{P(A_3)\, P_{A_3}(A) + P(A_4)\, P_{A_4}(A)} = \frac{6}{7}$$

și

$$P_A(A_4) = \frac{P(A_4)\, P_{A_4}(A)}{P(A_3)\, P_{A_3}(A) + P(A_4)\, P_{A_4}(A)} = \frac{1}{7}.$$

Prin urmare, probabilitatea ca săgeata ce a lovit ținta să aparțină primului arcaș este $\frac{6}{7}$.

69. *De pe un submarin se lansează asupra unui distrugător 4 torpile. Probabilitatea ca o torpilă să lovească distrugătorul este* 0,3. *Pentru scufundarea distrugătorului sînt suficiente două torpile, iar dacă o singură torpilă lovește distrugătorul el se scufundă cu probabilitatea* 0,6. *Să se găsească probabilitatea ca distrugătorul să se scufunde.*

SOLUȚIE. Considerăm evenimentele:

A scufundarea distrugătorului;

A_0 nici o torpilă nu lovește distrugătorul;

A_i distrugătorul este lovit de i torpile; $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Vom calcula probabilitatea evenimentului A^c, folosindu-ne de formula probabilității totale

$$P(A^c) = P(A_0)\, P_{A_0}(A^c) + P(A_1)\, P_{A_1}(A^c).$$

Deoarece lansarea unei torpile nu influențează cu nimic lansarea celorlalte torpile, avem

$$P(A_0) = (0{,}7)^4 \simeq 0{,}240,$$

$$P(A_1) = C_4^1 \cdot 0{,}3\ (0{,}7)^3 \simeq 0{,}412$$

și

$$P_{A_0}(A^c) = 1$$

$$P_{A_1}(A^c) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Urmează că

$$P(A^c) = (0{,}240)\ (1) + (0{,}412)\ (0{,}4) \simeq 0{,}405,$$

de unde

$$P(A) = 1 - P(A^c) \simeq 0{,}595.$$

70. *Să se arate că*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k}^{*} P_{A_i}(B_k) \lg P_{A_i}(B_k) \geqslant \sum_{k}^{*} P(B_k) \lg P(B_k)$$

unde $\sum_{k}^{*}$ *înseamnă că sumarea se face după anumite valori ale lui* k.

SOLUȚIE. Dacă sumarea se face după toate valorile lui k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ inegalitatea de mai înainte coincide cu inegalitatea

$$H_A(B) \leqslant H(B).$$

Să considerăm funcția convexă pentru $x > 0$,

$$f(x) = x \ln x.$$

Atunci pentru $x_i > 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right).$$

Dacă luăm

$$\lambda_i = P(A_i), \quad x_i = P_{A_i}(B_k),$$

obținem

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k}^{*} P_{A_i}(B_k) \lg P_{A_i}(B_k) = \sum_{k}^{*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} P(A_i) f(P_{A_i}(B_k)) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k}^{*} f\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B_k) \right) = \sum_{k}^{*} f(P(B_k)) = \sum^{*} P(B_k) \lg P(B_k),$$

ceea ce demonstrează inegalitatea dată.

71. *Fie Z o mulțime de evenimente $A_i B_k$ aparținînd cîmpului AB și U_0 o mulțime de evenimente A_i ale cîmpului A. Fie*

$$P(Z) > 1 - \delta_1,$$

$$P(U_0) > 1 - \delta_2,$$

unde $\delta_1 > 0$ și $\delta_2 > 0$. Să notăm cu Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ mulțimea evenimentelor B_k din B pentru care $A_i B_k$ nu aparține lui Z. De asemenea să notăm cu U_1 mulțimea evenimentelor $A_i \in U_0$ pentru care $P_{A_i}(\Gamma_i) \leqslant \alpha$.

Să se arate că

$$P(U_1) > 1 - \delta_2 - \frac{1}{\alpha} \delta_1.$$

SOLUȚIE. Să notăm cu U_2 mulțimea acelor evenimente A_i, pentru care

$$P_{A_i}(\Gamma_i) > \alpha$$

astfel încît

$$U_1 = U_0 - U_0 U_2. \tag{1}$$

Dacă $A_i \in U_2$, atunci

$$P(A_i \Gamma_i) = P(A_i) P_{A_i}(\Gamma_i) > \alpha P(A_i)$$

și deci

$$P\left(\sum_{A_i \in U_2} A_i \Gamma_i \right) = \sum_{A_i \in U_2} P(A_i \Gamma_i) > \alpha \sum_{A_i \in U_2} P(A_i) = \alpha P(U_2).$$

Cum evenimentele $A_i \Gamma_i$ sînt incompatibile cu evenimentul Z, rezultă

$$P\left(\sum_{A_i \in U_2} A_i \Gamma_i \right) \leqslant 1 - P(z) < \delta_1$$

și obținem

$$\alpha P(U_2) < \delta_1$$

sau

$$P(U_2) < \frac{1}{\alpha} \delta_1.$$

Cu atît mai mult avem

$$P(U_0\, U_2) < \frac{1}{\alpha}\,\delta_1.$$

Ținînd seama de relația (1), avem

$$P(U_1) = P(U_0) - P(U_0\ U_2) > 1 - \delta_2 - \frac{1}{\alpha}\,\delta_1$$

și cu aceasta inegalitatea este demonstrată.

72. *Pentru k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ dat, să notăm cu i_k acea valoare a indicelui i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ pentru care $P(A_i\ B_k)$ ia valoarea maximă.*

Suma

$$P = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} P(A_i\ B_k)$$

reprezintă probabilitatea de apariție a unei astfel de perechi $A_i B_k$ în care A_i nu este unul din evenimentele cele mai probabile ale cîmpului A pentru evenimentul B_k dat în cîmpul B. Evident, se poate scrie

$$P = P(i \neq i_k).$$

Evenimentul cel mai probabil al cîmpului A, pentru B_k dat va fi A_{i_k}.

Dacă pentru ε $(0 < \varepsilon < 1)$ dat se poate asocia fiecărui A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ o mulțime Δ_i de evenimente B_k, astfel încît

$$P(\Delta_i\ \Delta_j) = 0, \qquad (i \neq j)$$
$$P_{A_i}(\Delta_i) > 1 - \varepsilon, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

atunci

$$P < \varepsilon.$$

SOLUȚIE. Avem

$$P = 1 - \sum_{k=1}^{m} P(A_{i_k}\ B_k)$$

$$1 - P = \sum_{k=1}^{m} P(A_{i_k}\ B_k).$$

Fie Δ_0 mulțimea evenimentelor B_k (dacă există), care nu este inclusă în nici una din mulțimile Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; atunci domeniul de sumare din ultima sumă poate fi extins la $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ și avem

$$1 - P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{B_k \in \Delta_i} P(A_{i_k}\ B_k) + \sum_{B_k \in \Delta_0} P(A_{i_k}\ B_k) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{B_k \in \Delta_i} P(A_{i_k}\ B_k).$$

Ținînd seama de definiția indicelui i_k, partea dreaptă a inegalității de mai înainte poate fi micșorată, dacă în fiecare termen al sumei se schimbă indicele i_k cu oricare alt indice din șirul 1, 2, ..., n. De aceea

$$1 - P \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{B_k \in \Delta_i} P(A_i B_k) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \Delta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(\Delta_i) >$$

$$> (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 - \varepsilon.$$

De unde rezultă că

$$P < \varepsilon.$$

73. *Să se arate că pentru $n > 1$, avem*

$$H_B(A) \leqslant P \lg (n-1) - P \lg P - (1-P) \lg (1-P).$$

SOLUȚIE. Vom considera funcția convexă

$$f(x) = x \lg x, \quad x > 0.$$

Avem

$$H_B(A) = -\sum_k P(B_k) \sum f(P_{B_k}(A_i)) = H_1 + H_2$$

unde

$$H_1 = -\sum_k P(B_k) f(P_{B_k}(A_i)),$$

$$H_2 = -\sum_k P(B_k) \sum_{i \neq i_k} f(P_{B_k}(A_i)).$$

Însă

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \geqslant f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$$

și luînd $\lambda_k = P(B_k)$, $x_k = P_{B_k}(A_{i_k})$ și ținînd seama de faptul că

$$1 - P = \sum_{k=1}^{m} P(A_{i_k} B_k)$$

obținem

$$H_1 = -\sum_k \lambda_k f(x_k) \leqslant -f\left(\sum_k \lambda_k x_k\right) =$$

$$= -f\left(\sum_k P(B_k) P_{B_k}(A_{i_k})\right) = -f\left(\sum_k P(B_k A_{i_k})\right) =$$

$$= -f(1-P) = -(1-P) \lg (1-P). \qquad (1)$$

De asemenea avem

$$-\sum_k P(B_k) f(1-P_{B_k}(A_{i_k})) \leqslant -f\left(\sum_k P(B_k)\,[1-P_{B_k}(A_{i_k})]\right) =$$
$$= -f\left(1-\sum_k P(B_k A_{i_k})\right) = -f(P) = -P \lg P. \tag{2}$$

Întrucît

$$1 - P_{B_k}(A_{i_k}) = \sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i)$$

pentru orice k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ avem

$$f(1 - P_{B_k}(A_{i_k})) = \sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i) \lg \sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i) =$$

$$= (n-1) f\left(\frac{\sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i)}{n-1}\right) + \lg (n-1) \sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i).$$

Aplicînd din nou inegalitatea

$$\sum_k \lambda_k f(x_k) \geqslant f\left(\sum_k \lambda_k x_k\right)$$

punînd

$$\lambda_i = \frac{1}{n-1}, \quad x_i = P_{B_k}(A_i), \ (1 \leqslant i \leqslant n, \ i \neq i_k)$$

obținem

$$f\left(\frac{\sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i)}{n-1}\right) \leqslant \sum_{i \neq i_k} \frac{1}{n-1} f(P_{B_k}(A_i))$$

și prin urmare

$$f(1 - P_{B_k}(A_{i_k})) \leqslant \sum_{i \neq i_k} f(P_{B_k}(A_i)) +$$
$$+ \lg (n-1) \sum_{i \neq i_k} P_{B_k}(A_i).$$

Înmulțind inegalitatea de mai înainte cu $P(B_k)$, sumînd după valorile lui k și ținînd seama că

$$1 - P = \sum_{k=1}^{m} P(A_{i_k} \cdot B_k)$$

obținem

$$\sum_k P(B_k)\ f(1 - P_{B_k}(A_{i_k})) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k P(B_k) \sum_{i \neq i_k} f\ (P_{B_k}(A_i)) + P \lg (n-1) = \tag{3}$$
$$= -H_2 + P \lg (n-1).$$

Adunînd inegalitățile (1), (2) și (3) obținem

$$H_1 < -(1-P)\lg(1-P) - P\lg P - H_2 + P\lg(n-1),$$

de unde rezultă că

$$H_B(A) = H_1 + H_2 \leqslant P\lg(n-1) - P\lg P - (1-P)\lg(1-P)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

74. *Într-o urnă sînt n bile albe, n negre și n roșii. Se extrag n bile. Să notăm cu* ξ *numărul bilelor albe și cu* η *numărul celor negre. Se cere:*

a) $P(\xi = j,\ \eta = k)$;

b) $P(\xi = j),\ P(\eta = k)$;

c) $P(\eta = k \mid \xi = j)$.

SOLUȚIE. a) Se cere probabilitatea ca să extragem j bile albe și k bile negre. Atunci

$$P(\xi = j,\ \eta = k) = \frac{C_n^j C_n^k C_n^{n-j-k}}{C_{3n}^n}.$$

b) Probabilitatea ca printre cele n bile extrase, j să fie albe este dată de

$$P(\xi = j) = \frac{C_n^j C_{2n}^{n-j}}{C_{3n}^n}$$

iar probabilitatea ca printre cele n bile, k să fie negre este egală cu

$$P(\eta = k) = \frac{C_n^k C_{2n}^{n-k}}{C_{3n}^n}.$$

c) Avem

$$P(\eta = k \mid \xi = j) = \frac{P(\xi = j,\ \eta = k)}{P(\xi = j)} = \frac{C_n^k C_k^{n-j-k}}{C_{2n}^{n-j}}.$$

75. *Să se arate că dacă variabilele aleatoare* ξ_1 *și* ξ_2 *sînt independente, atunci și variabilele —* ξ_1 *și* ξ_2 *sînt de asemenea independente.*

SOLUȚIE.. Trebuie să arătăm că

$$P(-\xi_1 < x_1,\ \xi_2 < x_2) = P(-\xi_1 < x_1)\ P(\xi_2 < x_2).$$

Să observăm însă că

$$P(-\xi_1 < x_1,\ \xi_2 < x_2) = P(\xi_2 < x_2) - P(\xi_1 \leqslant -x_1,\ \xi_2 < x_2).$$

Cum ξ_1 și ξ_2 sînt independente, avem

$$P(\xi_1 \leqslant -x_1,\ \xi_2 < x_2) = P(\xi_1 \leqslant -x_1)\ P(\xi_2 < x_2)$$

și deci

$$P(-\xi_1 < x_1,\ \xi_2 < x_2) = P(\xi_2 < x_2) - P(\xi_1 \leqslant -x_1)\,P(\xi_2 < x_2) = \\ = [1 - P(\xi_1 \leqslant -x_1)]\ P(\xi_2 < x_2).$$

Însă

$$1 - P(\xi_1 \leqslant -x_1) = P(-\xi_1 < x_1).$$

Atunci

$$P(-\xi_1 < x_1,\ \xi_2 < x_2) = P(-\xi_1 < x_1)\ P(\xi_2 < x_2).$$

76. *Fie ξ_1 și ξ_2 două variabile aleatoare. Să notăm cu*

$$p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = P\ (\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2)$$

probabilitățile date pentru x_1 și x_2 în tabela următoare:

	$p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)$			
x_2 \ x_1	0	1	2	$p_{\xi_2}(x_2)$
0	h	$2h$	$3h$	$6h$
1	$2h$	$4h$	$6h$	$12h$
2	$3h$	$6h$	$9h$	$18h$
3	$4h$	$8h$	$12h$	$24h$
$p_{\xi_1}(x_1)$	$10h$	$20h$	$30h$	

unde $h = \frac{1}{60}$ *iar*

$$p_{\xi_1}(x_1) = \sum_{x_2} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2),$$

$$p_{\xi_2}(x_2) = \sum_{x_1} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2).$$

Se cere să se calculeze:

a) $P(\xi_1 > 1)$;
b) $P(\xi_1 = \xi_2)$;
c) $P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1)$;
d) $P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1)$;
e) $P(\xi_1 + \xi_2 > 2)$;
f) $P(\xi_1 \geqslant \xi_2 / \xi_2 > 1)$.

SOLUȚIE. a) Avem

$$P(\xi_1 > 1) = 1 - P(\xi_1 \leqslant 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) - P(\xi_1 = 1) = \\ = 1 - 10\ h - 20\ h = 1 - 30\ h = \frac{1}{2}.$$

b) Rezultă imediat

$$P(\xi_1 = \xi_2) = p_{\xi_1,\xi_2}(0, 0) + p_{\xi_1,\xi_2}(1, 1) + p_{\xi_1,\xi_2}(2, 2) =$$

$$= h + 4h + 9h = 14\ h = \frac{7}{30}.$$

c) Se observă că

$$P(\xi_1 \leqslant 1, \xi_2 \leqslant 1) = P_{\xi_1,\xi_2}(0, 0) + p_{\xi_1,\xi_2}(0, 1) + p_{\xi_1,\xi_2}(1, 0) +$$

$$+ p_{\xi_1,\xi_2}(1, 1) = h + 2h + 2h + 4h = \frac{3}{20}.$$

d) Avem

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1) = \sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{1-x_1} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = p_{\xi_1,\xi_2}(0, 0) +$$

$$+ p_{\xi_1,\xi_2}(0, 1) + p_{\xi_1,\xi_2}(1, 0) = 5h = \frac{1}{12}.$$

e) Se observă că

$$P(\xi_1 + \xi_2 > 2) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 2).$$

Însă

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 2) = \sum_{x_1=0}^{2} \sum_{x_2=0}^{2-x_1} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{x_2=0}^{2} [p_{\xi_1,\xi_2}(0, x_2) + \sum_{x_2=0}^{1} p_{\xi_1,\xi_2}(1, x_2) + \sum_{x_2=0}^{0} p_{\xi_1,\xi_2}(2, x_2)] =$$

$$= p_{\xi_1,\xi_2}(0, 0) + p_{\xi_1,\xi_2}(0, 1) + p_{\xi_1,\xi_2}(0, 2) + p_{\xi_1,\xi_2}(1, 0) +$$

$$+ p_{\xi_1,\xi_2}(1, 1) + p_{\xi_1,\xi_2}(2, 0) = 15\ h = \frac{1}{4}.$$

f) Rezultă că

$$P(\xi_1 \geqslant \xi_2 / \xi_2 > 1) = \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(2, 2)}{P(\xi_2 > 1)} =$$

$$= \frac{p_{\xi_1,\xi_2}(2, 2)}{1 - P(\xi_2 \leqslant 1)} = \frac{9h}{1 - 18h} = \frac{\frac{9}{60}}{1 - \frac{18}{60}}$$

și deci

$$P(\xi_1 \geqslant \xi_2 / \xi_2 > 1) = \frac{3}{14}.$$

77. *Fie A_1, A_2, ..., A_k, k evenimente într-un spațiu de probabilitate. Să se arate că*

$$\sum P(Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_k) = 2^k - 1$$

unde suma este luată asupra tuturor celor 2^k șiruri posibile distincte astfel ca Z_j este oricare A_j sau A_j^c ($j = 1, 2, \ldots, k$).

SOLUȚIE. Fie E_i o stare din cele 2^k evenimente menționate în problemă, și fie E_i^c evenimentul complementar lui E_i. Atunci

$$\sum_i \{P(E_i) + P(E_i^c)\} = 2^k.$$

Cum evenimentul complementar lui $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ este $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_k^c$ și la fel pentru celelalte, E_i^c sînt distincte și împreună formează întregul spațiu de probabilitate, astfel că

$$\sum_i P(E_i^c) = P\left(\bigcup_i E_i^c\right) = 1,$$

de unde

$$\sum_i P(E_i) = 2^k - 1.$$

78. *Cuvîntul „vectorial" este format din litere izolate scrise pe cartonașe. Amestecăm aceste cartonașe, apoi extragem din ele pe rînd patru, pe care le așezăm unul după altul. Să se afle probabilitatea de a obține cuvîntul „voce".*

SOLUȚIE. Să notăm cu A_1 evenimentul care constă în faptul că prima literă extrasă este v, cu A_2 evenimenul că a doua literă extrasă este o, cu A_3 evenimentul că a treia literă extrasă este c și cu A_4 evenimentul că a patra literă extrasă este e.

Evenimentul care ne interesează este $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

Atunci avem egalitatea

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\, P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4).$$

Însă

$$P(A_1) = \frac{1}{9},$$

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{8},$$

$$P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{1}{7},$$

$$P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) = \frac{1}{6}.$$

Rezultă deci că

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}.$$

79. *Șase vînători au zărit o vulpe și au tras simultan. Presupunem că la distanța respectivă, fiecare vînător nimerește în mod obișnuit vulpea și o ucide cu probabilitatea* 1/3. *Să se afle probabilitatea ca vulpea să fie ucisă.*

SOLUȚIE. Notăm cu $A_1, A_2, \ldots, A_6$ evenimentele ce constau în faptul că primul vînător, al doilea, ... , și al șaselea vînător a nimerit și ucis vulpea. Din condițiile problemei avem

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6.$$

Dacă notăm cu V evenimentul ca vulpea să fie ucisă, atunci

$$V = \bigcup_{i=1}^{6} A_i,$$

$$P(V) = 1 - P(V^c).$$

Însă

$$V^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_6^c.$$

Cum evenimentele $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_6^c$ sînt independente și $P(A_i^c) = \frac{2}{3}$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, rezultă imediat că

$$P(V) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{665}{729}.$$

80. *Fie ξ o variabilă aleatoare care poate lua valorile* $1, 2, \ldots, n$. *Probabilitatea ca variabila aleatoare ξ să ia valoarea j, $1 \leqslant j \leqslant n$ este proporțională cu j.*

Se cere:

a) *să se determine* $P(\xi = j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$;

b) *să se calculeze* $P(\xi = 1 / \xi = 1$ *sau* $\xi = n)$.

SOLUȚIE. Din condițiile problemei rezultă că avem

$$P(\xi = j) = k \cdot j \quad (k \text{ factorul de proporționalitate}).$$

Din condiția

$$\sum_{j=1}^{n} P(\xi = j) = 1$$

deducem valoarea constantei k, și anume

$$\sum_{j=1}^{n} kj = k \sum_{j=1}^{n} j = \frac{k n (n+1)}{2} = 1.$$

Deci

$$P(\xi = j) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

b) Din

$$P(\xi = 1/\xi = 1 \text{ sau } \xi = n) = \frac{P(\xi = 1)}{P(\xi = 1 \text{ sau } \xi = n)}$$

deducem

$$P(\xi = 1/\xi = 1 \text{ sau } \xi = n) = \frac{1}{1+n}.$$

Observație. Pentru aflarea probabilității condiționate de la punctul b) nu este nevoie să știm factorul de proporționalitate.

81. *Doi jucători A și B sînt într-un concurs care constă din mai multe partide. O partidă poate fi cîștigată de jucătorul A cu probabilitatea p, sau de jucătorul B cu probabilitatea q sau se poate termina nedecis cu probabilitatea* $r = 1 - p - q$.

Concursul ia sfîrșit cînd jucătorul A a cîștigat h partide sau cînd jucătorul B a cîștigat k partide.

Să se determine probabilitatea ca acest concurs, să se termine la a n-a partidă dînd cîștig jucătorului A.

SOLUȚIE. Determinăm mai întîi probabilitatea ca jocul să se termine la a *n-a* partidă dînd cîștig jucătorului *A*, în ipoteza că jucătorul *B* a cîștigat *x* partide.

Prin ipoteză jucătorul *A* cîștigă partida a *n-a* cu probabilitatea *p*. Relativ la primele $n-1$ partide știm că $h-1$ sînt cîștigate de jucătorul *A*, *x* partide de jucătorul *B* și $n-h-x$ sînt partide nule.

Probabilitatea acestui eveniment este

$$P_n(h-1,\ x;\ p, q, r) = \frac{(n-1)!}{(h-1)!\,x!\,(n-h-x)!}\, p^{h-1} q^x r^{n-h-x}.$$

Probabilitatea pentru ca jocul să se termine la a *n-a* partidă dînd cîștig jucătorului *A*, este

$$\frac{(n-1)!}{(h-1)!\,x!\,(n-h-x)!}\, p^h q^x r^{n-h-x}.$$

Probabilitatea ca să se termine concursul la a *n-a* partidă dînd cîștig jucătorului *A* este

$$\sum_{x=0}^{\min[k-1,\ n-h]} \frac{(n-1)!}{(h-1)!\,x!\,(n-h-x)!}\, p^h q^x r^{n-h-x}.$$

82. *Trei jucători A, B, C joacă împreună în următoarele condiții: joacă mai întîi A cu B, iar C nu participă la joc. Cel care pierde iese din joc și este înlocuit de C. De asemenea, după fiecare partidă, cel care pierde este înlocuit cu jucătorul care nu a participat la joc. Jocul ia sfîrșit cînd un jucător cîștigă de două ori consecutiv.*

Știind că probabilitatea de cîștig a unei partide este de $\frac{1}{2}$ *pentru fiecare jucător, să se calculeze probabilitatea ca jocul să se termine în n partide.*

SOLUȚIE. Probabilitățile ca jocul să se termine la partida a doua, a treia, a patra, ..., a n-a, sînt respectiv

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}},$$

căci există la fiecare partidă o șansă din două pentru ca jocul să se termine. Probabilitatea relativă la o partidă este deci jumătate din probabilitatea relativă la partida precedentă. Probabilitatea ca jocul să se termine în n partide este

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}.$$

De aici urmează imediat că probabilitatea ca jocul să nu se termine în n partide este egală cu

$$1 - \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Probabilitatea ca jucătorul C să cîștige jocul în final este :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{11}} + \ldots = \frac{4}{14}.$$

Probabilitatea ca jucătorul A să cîștige jocul în final este egală cu probabilitatea ca să cîștige în final jucătorul B și este egală cu $\frac{5}{14}$.

83. *Într-o urnă se află l bile numerotate* 1, ,2 ..., l. *Din urnă se fac extracții punîndu-se de fiecare dată bila extrasă la loc în urnă. Care este probabilitatea ca după n extracții suma numerelor extrase să fie egală cu k?*

SOLUȚIE. Numărul tuturor cazurilor posibile este l^n, pentru că la fiecare extracție avem l posibilități.

Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul modurilor de a forma o sumă egală cu k din n numere mai mici decît $l + 1$. Această sumă este dată de coeficientul lui x^k din dezvoltarea lui

$$(x + x^2 + \ldots + x^l)^n.$$

Cum însă

$$x + x^2 + \ldots + x^l = \frac{x(1 - x^l)}{1 - x}$$

putem să scriem

$$(x + x^2 + \ldots + x^l)^n = x^n (1 - x^l)^n (1 - x)^{-n}. \tag{1}$$

Dar

$$(1 - x^l)^n = 1 - \frac{n}{1.!} x^l + \frac{n(n-1)}{2!} x^{2l} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{3l} + \ldots$$

și

$$(1 - x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} x^3 + \dots$$

Va trebui să căutăm suma coeficienților lui x^k în dezvoltarea (1) sau aceea a coeficienților lui x^{k-n} în produsul celor două serii scrise mai înainte.

Primului coeficient din prima serie îi corespunde coeficientul lui x^{k-n} din a doua serie, celui de al doilea coeficient din prima serie îi corespunde coeficientul lui x^{k-n-l} din a doua serie etc.

Coeficientul care ne interesează are deci valoarea

$$\frac{n(n+1)\dots(k-1)}{(k-n)!} - \frac{n}{1!} \cdot \frac{n(n+1)\dots(k-l-1)}{(k-n-l)!} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{n(n+1)\dots(k-2l-1)}{(k-n-2l)!}.$$

Seria se continuă atîta timp cît factorii ce intervin în rapoartele de mai înainte rămîn pozitivi.

Ca să aflăm probabilitatea nu avem decît să împărțim suma obținută la l^n.

84. *Într-o urnă există a bile albe și b bile negre. Se cere să se determine probabilitatea ca în trei extracții succesive, fără a pune bila înapoi în urnă, să extragem numai bile albe.*

SOLUȚIE. Să notăm cu A_1, A_2, A_3 evenimentele care constau în faptul că în cele trei extracții am obținut bile albe.

Atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\ P(A_2/A_1)\ P(A_3/A_1 \cap A_2).$$

Însă

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b},$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{a-1}{a+b-1},$$

iar

$$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{a-2}{a+b-2}$$

și deci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a-2}{a+b-2}.$$

Observație. Dacă din urnă se extrag n bile una cîte una fără a se înapoia bila extrasă, atunci probabilitatea ca primele k bile extrase să fie albe este dată de

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)\,b(b-1)\cdots(b-n+k-1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1)}.$$

85. *Se repartizează la întîmplare r bile în n urne. Să se afle probabilitatea ca m urne să rămînă goale* $(0 < m < n)$.

SOLUȚIE. Să presupunem că am numerotat urnele de 1 la n, și fie A_k evenimentul că urna cu numărul k este goală $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Notăm cu

$$p_i = P(A_i),\ p_{ij} = P(A_i \cap A_j),\ p_{ijk} = P(A_i \cap A_j \cap A_k) \text{ etc.}$$

Dar $P(A_i)$ dacă o scriem ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile pe cele posibile este

$$p_i = P(A_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Analog

$$p_{ij} = P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^r}{n^r} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^r;\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{ij\ldots\nu} = P(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_\nu) = \frac{(n-\nu)^r}{n^r} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r;\ \nu \leqslant n.$$

Să notăm acum $p_m(r, n)$ probabilitatea ca m urne să fie goale. Evident $p_0(r, n)$ va fi probabilitatea ca toate urnele să fie ocupate și ea este egală cu

$$1 - S_1 + S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$$

unde

$$S_\nu = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_\nu}) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu} p_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} =$$

$$= C_n^\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r.$$

Deci

$$p_0(r, n) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r.$$

Putem trece acum la calculul probabilității $p_m(r, n)$. Ca m urne să fie goale, trebuie ca $n - m$ să fie ocupate. Cum cele m urne pot fi alese în C_n^m moduri rezultă că

$$p_m(r, n) = C_n^m \left(1 - \frac{m}{n}\right)^r p_0(r, n - m).$$

Așadar, făcînd înlocuirile necesare, obținem

$$p_m(r, n) = C_n^m \left(1 - \frac{m}{n}\right)^r p_0(r, n - m) =$$

$$= C_n^m \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu C_{n-m}^\nu \left(1 - \frac{m+\nu}{n}\right)^r.$$

86. *Doi candidați (concurenți) A și B au obținut corespunzător a și b (b < a) voturi. Să se afle probabilitatea P ca în procesul de numărătoare a voturilor A să fie totdeauna înaintea lui B.*

SOLUȚIE. Considerăm un sistem rectangular de axe de coordonate. Numărului x de voturi obținute de A la un moment dat și numărului y de voturi obținute de B la același moment facem să-i corespundă punctul de coordonate (x, y).

Numărul de traiectorii care ne duce de la punctul $O(0, 0)$ la punctul $M(a, b)$ este egal cu $\frac{(a+b)!}{a!\,b!} = C_{a+b}^a$.

Probabilitatea ca în procesul de numărătoare A să fie totdeauna înaintea lui B este egală cu probabilitatea ca punctul corespunzător să se afle mereu sub prima bisectoare.

Pentru a afla această probabilitate, aflăm mai întîi probabilitatea evenimentului complementar, care este egală cu raportul dintre numărul de traiectorii ce duc de la $O(0, 0)$ la $M(a, b)$ și care taie prima bisectoare pe numărul total de traiectorii ce duc de la $O(0, 0)$ la $M(a, b)$.

Traiectoriile ce duc de la $O(0, 0)$ la $M(a, b)$ și taie bisectoarea, trece neapărat sau prin $(1, 0)$ sau prin $(0, 1)$.

Din cauza simetriei, numărul traiectoriilor ce trec prin $(1, 0)$ și taie bisectoarea este egal cu cel al traiectoriilor ce trec prin $(0, 1)$ și taie bisectoarea și este egal cu

$$\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}.$$

Așadar probabilitatea ca cel puțin o dată B să fie înaintea lui A este

$$\frac{2(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} \Big/ \frac{(a+b)!}{a!\,b!} = \frac{2b}{a+b}.$$

Deci probabilitatea ca A să fie mereu înaintea lui B este

$$1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

87. *Să se arate că într-un joc cu aruncarea monezii probabilitatea ca să apară echilibru (rezultat egal) pentru prima dată după 2n aruncări, este egală cu*

$$\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \sim \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}}.$$

SOLUȚIE. Din punctul de coordonate (0, 0) ajungem în punctul (n, n) prin 2^{2n} drumuri diferite. După $2n$ aruncări am sosit pentru prima dată în punctul de forma (n, n) dacă din $2n - 1$ aruncări am ajuns sau în $(n, n-1)$ sau în $(n-1, n)$.

Numărul traiectoriilor care taie prima bisectoare și ajung în $(n, n-1)$ este conform exercițiului precedent egal cu

$$2\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}.$$

Numărul total al traiectoriilor care ajung în $(n-1, n)$ sau $(n, n-1)$ tăind bisectoarea este

$$4\frac{(2n-2)}{n!(n-2)!}.$$

Numărul total al traiectoriilor ce ajung în $(n, n-1)$ este dat de

$$\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}.$$

Din acestea, nu vor tăia bisectoarea un număr de traiectorii dat de

$$\frac{(2n-1)}{n!(n-1)!} - 2\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}\left[\frac{2n-1}{n-1} - 2\right] = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

La fel, numărul traiectoriilor ce ajung în $(n-1, n)$ și nu vor tăia bisectoarea este

$$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

De aici urmează că probabilitatea ca să avem pentru prima dată egalitatea după $2n$ aruncări este

$$\frac{2\cdot\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}{2^{2n}} = \frac{(2n-3)!!\,2^n}{n!\,2^{2n}} = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

unde

$$(2n-3)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3),\ (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n.$$

Folosind acum formula lui Stirling pentru aproximarea lui $n!$,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n} e^{\theta_n},\ 0 < \theta_n < \frac{1}{12n}$$

se obține printr-o simplă înlocuire și simplificare, că

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \simeq \frac{1}{(2n-1)\sqrt{\pi n}}.$$

88. *Doi jucători aruncă pe rînd cu moneda. Să se arate că probabilitatea ca jucătorul ce și-a ales stema și avînd la dispoziția sa m unități de miză să-și piardă toate unitățile după $2n + m$ aruncări, este egală cu*

$$\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{2^{m+2n}\, n\,!}.$$

SOLUȚIE. Din problemă reiese că jucătorul cu stema cîștigă de n ori iar cel cu fața opusă de $n + m$ ori.

Vom avea de determinat numărul traiectoriilor ce duc din (0, 0) în $(n + m, n)$ și care sînt astfel încît în orice punct abscisa este mai mică decît ordonata plus m .

Dacă luăm originea în $(n + m, n)$, și mergem în jos spre stînga, problema se reduce la a găsi numărul traiectoriilor care nu taie bisectoarea și ajung în (0, 0). Acest număr este însă conform exercițiului (86).

$$\frac{(2n+m)\,!}{n\,!\,(n+m)\,!} - \frac{2\,(2n+m-1)\,!}{(n+m)\,!\,(n-1)\,!} = \frac{(2n+m-1)\,!\,m}{(n+m)\,!\,n\,!}.$$

Numărul total de traiectorii ce corespund celor $2n + m$ aruncări, este 2^{2n+m}.

Deci probabilitatea căutată este

$$\frac{(2n+m-1)\,!\,m}{n\,!\,(n+m)\,!\,2^{2n+m}} = \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{n\,!\,2^{2n+m}}.$$

89. *Fie $\{[0, 1], B_{[0,1]}, P\}$ un cîmp de probabilitate (unde P este măsura Lebesgue pe dreaptă). Considerăm $E \in B_{[0,1]}$ pentru care $P(E) > 0$ și un întreg $n > 1$. Să se arate că există un șir de evenimente $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset B_{[0,1]}$ disjuncte două cîte două astfel încît*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{și} \quad P(E_i) = \frac{P(E)}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

SOLUȚIE. Fie C_1, marginea inferioară a mulțimii

$$\left\{ x > 0 ;\ P(E \cap [0, x)) \leqslant \frac{P(E)}{n} \right\}.$$

Atunci dacă $\{d_k\}$ este un șir strict crescător de numere pozitive convergent către C_1 și $\{d'_k\}$ un șir de numere strict descrescător de numere pozitive convergent către C_1, avem

$$E \cap [0, d_k) \subset E \cap [0, C_1] \subset E \cap [0, d'_k).$$

Să luăm probabilitatea acestei incluziuni

$$P(E \cap [0, d_k)) \leqslant \frac{P(E)}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

și

$$P(E \cap [0, d_k')) > \frac{P(E)}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Însă

$$P(E \cap [0, C_1)) = \sup_k P(E \cap [0, d_k)) = \inf_k P(E \cap [0, d_k'))$$

de unde

$$P(E \cap [0, C_1)) = \frac{P(E)}{n}.$$

Prin inducție se poate acum construi C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ astfel încît $0 = C_0 < C_1 < \ldots < C_n$ și

$$P(E \cap [C_{i-1}, C_i)) = \frac{P(E)}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Punem acum

$$E_i = E \cap [C_{i-1}, C_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Se observă imediat că evenimentele E_i satisfac condițiile problemei.

90. *Fie o serie de probe independente cu rezultatele fiecărei probe evenimente într-un spațiu de selecție dat (fixat). Fie $E_1, E_2, \ldots, E_m$, B, $m+1$ evenimente cu B disjunct de fiecare E_i. Care este probabilitatea ca toate evenimentele E_i să se întîmple înainte ca B să aibă loc?*

SOLUȚIE. Fie A_1^i ($A_2^i, \ldots, A_m^i$, B^i, respectiv) evenimentul ca E_1 ($E_2, \ldots, E_m$, B, respectiv) să nu se producă în primele i probe.

Fie B_{i+1} evenimentul: „B se produce în proba $i+1$" și fie F_{i+1} evenimentul $(A_1^i \cup A_2^i \cup \ldots \cup A_m^i)\, B^i\, B_{i+1}$, unde $i = 1, 2, \ldots$ Fie $F_1 = B_1$. Astfel F_i este evenimentul ca B să se producă în primele i probe și $E_1, \ldots, E_m$ să nu se fi produs încă. Mai tîrziu ne vom referi la F_i ca să nu se producă în experiența i. Probabilitatea $P(F)$, ca B să se producă înaintea tuturor evenimentelor E_i, eveniment la care ne referim ca la o nereușită, este $\sum_{i=0}^{\infty} P(F_{i+1})$. Soluția problemei va fi

$$1 - P(F).$$

Luînd $A_1^i \cup A_2^i \cup \ldots \cup A_n^i = A^i$, se vede că

$$P(F_{i+1}) = P(A^i\, B^i\, B_{i+1}) = P(A^i\, B^i)\; P(B_{i+1}) = P(A^i\, B^i) \cdot P(B)$$

unde a doua egalitate urmează deoarece evenimentul care se produce în proba $i+1$ este stochastic independent de toate evenimentele, astfel că $A^i\, B^i$, se produc în primele i probe.

Rămîne să calculăm $P(A^i B^i)$. Pentru $i \geqslant 1$.

$$P(A^i B^i) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k^i B^i\right) = \sum_{k_1} P(A_{k_1}^i B^i) - \sum_{k_1 < k_2 \leqslant m} P(A_{k_1}^i A_{k_2}^i B^i) + \ldots =$$

$$= \sum_{k_1} (P(A_{k_1} B^1))^i - \sum_{k_1 < k_2 \leqslant m} (P(A_{k_1} A_{k_2} B^1))^i + \ldots$$

unde a doua egalitate urmează dintr-o relație stabilită (vezi problema 46) și a treia egalitate din indepedența probelor.

Probabilitatea unui eventual insucces este dată de

$$P(F) = \sum_{i=0}^{\infty} P(F_{i+1}) = P(B)\left\{1 + \sum_{i=1}^{\infty} P(A^i B^i)\right\} =$$

$$= P(B)\left\{\sum_{k_1} \sum_{i=0}^{\infty} (P(A_{k_1} B^1))^i - \sum_{k_1 < k_2 \leqslant m} \sum_{i=0}^{\infty} (P(A_{k_1} A_{k_2} B^1))^i + \ldots\right\} =$$

$$= P(B)\left\{\sum_{k_1} \frac{1}{1 - P(A_{k_1} B^1)} - \sum_{k_1 < k_2 \leqslant m} \frac{1}{1 - P(A_{k_1} A_{k_2} B^1)} + \ldots\right\} =$$

$$= P(B)\left\{\sum_{k_1} \frac{1}{P(E_{k_1} \cup B)} - \sum_{k_1 < k_2 \leqslant m} \frac{1}{P(E_{k_1} \cup E_{k_2} \cup B)} + \ldots\right\}$$

Probabilitatea unui eventual succes este prin urmare

$$P(S) = P(B)\left\{\frac{1}{P(B)} - \sum_{k_1} \frac{1}{P(E_{k_1} \cup B)} + \ldots\right\}, \text{ unde } P(B) > 0.$$

A treia egalitate în calcularea lui $P(F)$ rezultă luînd sumele în $i = 0$, deoarece

$$\sum_{k_1} (1) - \sum_{k_1 < k_2 \leqslant m} (1) + \ldots = 1 - (1 - 1)^m = 1$$

Cînd $P(B) = 0$, poate să se arate că $P(S) = 1$ dacă toți $P(E_i) > 0$, și $P(S) = 0$ dacă unele din $P(E_i)$ sînt nule.

91. *Diferiți întregi sînt înscriși pe* 1000 *cartonașe, care apoi se întorc cu fața în jos. Jucătorul (care nu are cunoștință de întregii folosiți) întoarce pe față și citește atîtea cartonașe cîte dorește. Reușita are loc cînd întregul de pe ultimul cartonaș întors este cel mai mare din cei* 1000 *întregi. Dacă numai un cartonaș este întors pe față probabilitatea de reușită este* 1/1000. *Imaginînd un sistem de joc care dă probabilitatea maximă de reușită, să se determine această probabilitate.*

SOLUȚIE. Presupunem că pentru $n = 1\,000$, $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1}$.

Pentru a obține informația inițială, în fiecare sistem trebuie să întoarcem la început x cartonașe. Un sistem care se oprește cînd ultimul număr nu este mai mare ca precedentele este un sistem defectuos, deoarece

continuînd dă o probabilitate mai mare de reușită. De aceea continuăm pînă cînd întîlnim (să spunem după k cartonașe) un număr mai mare decît toate cele dinainte. Atunci ne oprim. Dacă nu ne oprim este același lucru ca și cînd aș înlocui pe x prin $x' = x + k$, de altfel urmînd același sistem. Fie A mulțimea de numere de pe x cartonașe întoarse și B mulțimea de numere de pe cele $n - x$ cartonașe rămase. Fie

$$p_i = P\,(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1} \in B \text{ și } a_i \in A)\,;\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dacă $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1} \in B$, atunci probabilitatea ca să întîlnim pe a_0 pe primul dintre ele este $1/i$. Deci

$$P\,(\text{reușită}) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i/i = \frac{n-x}{n} \cdot \frac{x}{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{x}{n-2} + \ldots =$$

$$= \frac{x}{n}\left[\left(1 - \frac{x}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n-1}\right)\frac{n}{n-2} + \ldots\right].$$

Punînd $x/n = y$ și trecînd la limită pentru $n \to \infty$ găsim P (reușită) $= -y \ln y$. Această funcție are maximul pentru

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}y = -1 - \ln y = 0 \text{ sau } y = \frac{1}{e}.$$

Deci, întoarcem 368 cartonașe și notăm cu m cel mai mare întreg de pe ele. Continuăm acum, oprindu-ne cu primul cartonaș ce depășește pe m. Probabilitatea de reușită este 0,368.

92. *Există o probabilitate finită și aditivă pe mulțimea tuturor submulțimilor de întregi pozitivi care atașează probabilitatea zero mulțimilor finite?*

SOLUȚIE. Există. Construim măsura P în felul următor. Fie $\nu(B)$ numărul elementelor din mulțimea B. Definim șirul $\{P_n(B)\}_{1 \leqslant n < \infty}$ astfel:

$$P_n(B) = \frac{1}{n}\,\nu\,(B \cap \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Șirul $\{P_n(B)\}$ este mărginit pentru orice submulțime B de întregi pozitivi. În aceste condiții există o limită Banach $P(B) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(B)$ a șirului $\{P_n(B)\}$.

Se observă că astfel definită, funcția de mulțimi P este finită, aditivă și nenegativă.

Ori de cîte ori șirul $\{P_n(B)\}$ este convergent avem

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P_n(B) = \lim_{n\to\infty} P_n(B).$$

Prin urmare

$$P\{1, 2, \ldots\} = 1,$$

și dacă B este orice mulțime finită a lui $\{1, 2, \ldots\}$ atunci

$$P(B) = 0.$$

93. *Se aruncă o monedă de mai multe ori și fie p probabilitatea ca la un anumit moment numărul ce dă apariția fetei să depășească de două ori numărul ce ne dă apariția stemei.*

Să se arate că

$$p = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1). \tag{1}$$

SOLUȚIA I. În general, fiind dați întregii $a > b > 0$, și notînd cu $f(t)$ probabilitatea ca la un moment, într-o succesiune infinită de aruncări ale monedei, numărul de fețe depășește de a/b ori numărul care ne dă apariția stemei mai mare de t/b. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_b$ reprezintă rădăcinile z astfel ca

$$z^{-b} + z^a = 2, \quad |z| \leqslant 1 \tag{2}$$

și dacă h_t reprezintă suma de C_{b+t}^t produse distincte de t factori cu repetiție permisă, formați din cele $b+1$ cantități $z_0 = 1, z_1, z_2, \ldots, z_b$ vom demonstra că

$$p = f(0) = 1 - \prod_{i=1}^{b}(1 - z_i), \quad f(t) = 1 - h_t(1-p); \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Mai clar, pentru $a = 2$, $b = 1$, $t = 0$, vom avea

$$p^{-1} + p^2 = 2 \text{ sau } p^3 - 2p + 1 = (p-1)(p^2 + p - 1) = 0 \tag{4}$$

și cazul special obținut va avea soluția

$$p = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Probabilitatea $f(t)$ devine $f(t-b)$ dacă la o aruncare apare fața și $f(t+a)$ dacă la o aruncare apare stema. Deci

$$f(t) = \frac{1}{2}[f(t-b) + f(t+a)]. \tag{5}$$

Această ecuație de gradul $a+b$ are $a+b$ soluții liniar independente, de forma z_i^t corespunzînd la cele $a+b$ rădăcini ale ecuației (2). Deoarece $f(t)$ tinde către zero cînd $t \to \infty$, putem folosi numai acele soluții pentru care $|z| < 1$. Atunci

$$f(t) = \sum_{i=1}^{b} c_i z_i^{b+t}, \quad t \geqslant -b, \quad f(0) = p \tag{6}$$

și determinăm constantele c_i din condițiile limită

$$f(-1) = f(-2) = \ldots = f(-b) = 1, \tag{7}$$

deoarece pentru t negativ egalitatea este de la început satisfăcută. Eliminarea lui c_i din ecuațiile (6) și (7) ne dă ecuația determinant

$$\begin{vmatrix} f(t) & z_1^{b+t} & \ldots & z_b^{b+t} \\ 1 & z_1^{b-1} & \ldots & z_b^{b-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_1 & \ldots & z_b \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Pentru $t = 0$, $p = f(0)$, ecuația (8) exprimă pe $1 - p$ ca un raport a doi determinanți Wandermonde

$$1 - p = V(1, z_1, z_2, \ldots, z_b)/V(z_1, z_2, \ldots, z_b) = \prod_{i=1}^{b} (1 - z_i). \tag{9}$$

Pentru $t = 1, 2, \ldots$, ecuația (8) poate fi schimbată în

$$\frac{1 - f(t)}{1 - f(0)} = \begin{vmatrix} 1 & z_1^{b+t} & \ldots & z_b^{b+t} \\ 1 & z_1^{b-1} & \ldots & z_b^{b-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_1 & \ldots & z_b \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & z_1^{b} & \ldots & z_b^{b} \\ 1 & z_1^{b-1} & \ldots & z_b^{b-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_1 & \ldots & z_b \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = h_t.$$

ceea ce demonstrează ecuația (3) și rezolvă problema.

Soluția II. Considerăm o particulă care se deplasează în acord cu rezultatul obținut în urma aruncării unei monede, particula mișcîndu-se două unități la dreapta pentru apariția stemei și o unitate la stînga pentru apariția unei fețe. Dacă pornim din poziția $+1$, ajungem sau mergem la stînga originii, cînd numărul ce indică apariția feței depășește de două ori numărul de apariții ale stemei. Pentru o soluție fie q_x probabilitatea ultimei reveniri în origine dacă particula pornește dintr-o poziție $x > 0$. Atunci, cu convenția $q_0 = 1$, avem $q_x = \frac{1}{2} q_{x+2} + \frac{1}{2} q_{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$

O soluție probabilă $q_x = \lambda^x$ conduce la $\lambda = 1$ sau $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{5}-1)$. Condițiile evidente ale soluției sînt: $q_0 = 1$ și $q_x \to 0$ cînd $x \to \infty$, care dau $q_x = 2^{-x} \cdot (\sqrt{5}-1)^x$, unde soluția problemei date este $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

94. *Se aruncă de mai multe ori o monedă și de fiecare dată se înregistrează raportul dintre numărul de apariții a fetei și numărul de apariții a stemei; fie acesta F/S.*

Dacă $a/b > 1$ *să se arate că*

$$P\left(\max \frac{F}{S} \leqslant \frac{a}{b}\right) = \prod_{\rho} (1 - \rho).$$

$$P\left(\max \frac{F}{S} = \frac{a}{b}\right) = \prod_{\rho} (1 - \rho) + \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right),$$

unde ρ *sînt zerourile lui* $z^{a+b} - 2z^b + 1$ *situate în* $|z| \leqslant 1$.

SOLUȚIE. Pentru fiecare $n \geqslant 0$, definim

$$p_n = P\left(F \leqslant \frac{aS + n}{b} \text{ întotdeauna}\right).$$

Introducînd restricția $n \geqslant b$ și considerînd cele două alternative — prima aruncare este fața sau prima aruncare este stema, obținem

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n-b} + \frac{1}{2} p_{n+a}, \quad n \geqslant b \tag{1}$$

și în mod analog

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n+a}, \qquad 0 \leqslant n < b. \tag{2}$$

Legea tare a numerelor mari ne arată că $p_n \to 1$, cînd $n \to \infty$. Dacă introducem funcția generatoare $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ putem spune:

$$f(x) \text{ este analitică pentru } |x| < 1$$

și

$$(1 - x)\, f(x) \to 1, \text{ cînd } x \to 1. \tag{3}$$

Formăm $(1 + x^{a+b} - 2x^a)\, f(x)$ și considerăm coeficientul lui x^n. Pentru $n < a$ coeficientul lui x^n este p_n; pentru $a \leqslant n < a + b$, coeficientul este $p_n - 2p_{n-a}$ care după (2) este zero și pentru $n \geqslant a + b$ coeficientul este $p_n + p_{n-a-b} - 2p_{n-a}$ care este zero după (1).

Astfel avem

$$(1 + x^{a+b} - 2x^a)\, f(x) = \sum_{n<a} p_n x^n. \tag{4}$$

Acum

$$(1 + x^{a+b} - 2x^a) = (1 - x) \prod_{\rho} (1 - \rho x) \prod_{\sigma} (1 - \sigma x).$$

unde ρ sînt zerourile lui $z^{a+b} - 2z^b + 1$ din $|z| < 1$, iar σ sînt zerourile aceluiași polinom în $|z| > 1$.

Aplicînd teorema lui Rouché la ecuația $z^{a+b} + 1 = 2z^b$ rezultă că numărul rădăcinilor ρ este b. de unde obținem că numărul rădăcinilor σ este $a - 1$.

Deoarece funcția f este analitică în $|x| < 1$, (4) implică că $\sum_{n<a} p_n x^n$ se anulează în toate punctele $1/\sigma$, și cum numărul lor este $a - 1$, trebuie să avem

$$\sum_{n<a} p_n x^n = C \prod (1 - \sigma x) \tag{5}$$

unde C este o constantă.

Combinînd (4) cu (5) obținem

$$(1 - x)\, f(x) \prod (1 - \rho x) = C.$$

Pentru $x \to 1$, din (3) obținem

$$C = \prod (1 - \rho x),$$

astfel încît (5) devine

$$\sum_{n<a} p_n x^n = \prod (1 - \rho) \cdot \prod (1 - \sigma x). \tag{6}$$

Relația (6) ne dă

$$P\left(\max \frac{F}{S} \leqslant \frac{a}{b}\right) = P\left(F \leqslant \frac{aS}{b} \text{ întotdeauna}\right) = p_0 = \prod (1 - \rho).$$

Analog

$$p_{a-1} = \prod (1 - \rho) \prod (-\sigma), \text{ însă cum } - \prod (-\rho) \prod (-\sigma) = 1,$$

avem

$$p_{a-1} = - \prod \left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

De aceea

$$P\left(\frac{F}{S} \leqslant \frac{a}{b} \text{ întotdeauna}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{la prima aruncare} \\ \text{apare stema } S\end{matrix}\right) \cdot p_{a-1} = \frac{1}{2} p_{a-1}$$

și din (7) avem

$$P\left(\max \frac{F}{S} = \frac{a}{b}\right) = \prod (1 - \rho) + \frac{1}{2} \prod \left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Dacă a/b este un întreg, adică $b = 1$, există numai un ρ și rezultatul este

$$P\left(\max \frac{F}{S} < a\right) = 1 - \rho\,;\quad P\left(\max \frac{F}{S} = a\right) = (1-\rho)\left(1 - \frac{1}{2\rho}\right),$$

unde ρ este singurul zero al funcției $z^{a+1} - 2z + 1$ în $|z| < 1$.

Observație. Pentru calcularea probabilității $P(B)$ unde $B = f(A_1, A_1^c, \ldots, A_m, A_m^c)$ este foarte simplu să se folosească metoda indicatorilor evenimentelor. Pentru aceasta se recomandă să se parcurgă următoarele etape:

1) se fac operațiile asupra evenimentelor cu complementara, intersecția și reuniunea;

2) se înlocuiește fiecare eveniment cu indicatorul său, se desfac parantezele și se calculează valoarea medie. [Valoarea medie a indicatorului este egală cu probabilitatea evenimentului respectiv].

95. *Folosind metoda indicatorilor arătată mai înainte să se exprime*

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \text{ și } P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j \cap \left(\bigcup_{j=k+1}^{m} A_j^c\right)\right)$$

prin probabilitățile $P\left(\bigcap_{j=1}^{r} A_j\right)$.

SOLUȚIE. Putem să scriem egalitatea următoare:

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) \cup \ldots \cup \left(A_m \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i^c\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\right)^{*)}$$

Trecînd acum la indicatori avem

$$I_{\bigcup_{j=1}^{m} A_j} = \sum_{k=1}^{m} \left(I_{A_k} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - I_{A_i})\right) = \sum_{k=1}^{m} I_{A_k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k-1} (-1)^l I_{A_{i_1}} I_{A_{i_2}} \ldots I_{A_{i_l}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k-1} (-1)^l I_{A_k} I_{A_{i_1}} I_{A_{i_2}} \ldots I_{A_{i_l}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k-1} (-1)^l I_{A_k \cap A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}}.$$

De aici urmează că luînd valoarea medie, avem

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant k-1} (-1)^l P\,(A_k \cap A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}).$$

*) Punem aici $\bigcup$ cînd avem evenimente compatibile, iar $\sum$ cînd avem evenimente incompatibile.

Pentru a doua parte avem, folosind indicatorii,

$$I_{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap \left(\bigcup_{i=k+1}^{m} A_i^c\right)} = I_{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} \cdot I_{\bigcup_{i=k+1}^{m} A_i^c} = \left(\prod_{j=1}^{k} I_{A_j}\right)\left(\sum_{i=k+1}^{m} I_{A_i^c} \prod_{h=k+1}^{i-1} I_{A_h}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k} I_{A_j}\right) \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{m} (1 - I_{A_i}) \prod_{h=k+1}^{i-1} I_{A_h}\right) = \prod_{j=1}^{k} I_{A_j} \cdot \sum_{i=k+1}^{m} \prod_{h=k+1}^{i-1} I_{A_h} -$$

$$- \prod_{j=1}^{k} I_{A_j} \cdot \sum_{i=k+1}^{m} \prod_{h=k+1}^{i} I_{A_h} = \sum_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{k} I_{A_j} \cdot \prod_{h=k+1}^{i-1} I_{A_h} -$$

$$- \sum_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{k} I_{A_j} \cdot \prod_{h=k+1}^{i} I_{A_h} = \sum_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{i-1} I_{A_j} - \sum_{i=k+1}^{m} \prod_{j=1}^{i} I_{A_j} =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{m} I_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j} - \sum_{i=k+1}^{m} I_{\bigcap_{j=1}^{i} A_j}.$$

Trecînd la valoarea medie, găsim

$$P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap \left(\bigcup_{i=k+1}^{m} A_i\right)\right) = \sum_{i=k+1}^{m} P\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right) - \sum_{i=k+1}^{m} P\left(\bigcap_{j=1}^{i} A_j\right).$$

96. *Fie* $I_{A_j} = I_j$ *și* $R = \sum_{j=1}^{n} I_j$ *care caracterizează repetarea lui* A *adică numărul de apariții a evenimentului* A.

Notăm cu $J_0 = 1$, $J_r = \sum I_{j_1} I_{j_2} \ldots I_{j_r}$, *unde sumarea se face după toate combinațiile* $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant m$.

Fie $I_{[r]}$ *indicatorul evenimentului care constă în faptul că a apărut de exact* r *ori evenimentul* A, $I_{(r)}$ *indicatorul evenimentului care constă în faptul că a apărut de cel puțin* r *ori evenimentul* A *și să punem*

$$S_r = M(J_r), \quad P_{[r]} = M(I_{[r]}), \quad P_{(r)} = M(I_{(r)}).$$

Să se arate că

a) $$\sum_{r=0}^{m} u^r I_{[r]} = \sum_{s=0}^{m} (u-1)^s J_s = u^R$$

și să se deducă de aici:

b) $$P_{[r]} = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r S_k,$$

c) $$S_k = \sum_{l=k}^{m} C_l^k P_{[l]} = \sum_{l=k}^{m} C_{l-1}^{k-1} P_{(l)},$$

d) $$R(R-1)\ldots(R-k+1) = k!\, J_k.$$

SOLUȚIE. a) Fie ω pentru care $R(\omega) = r$. Atunci din suma $\sum_{k=0}^{m} u^k I_{[k]}$ rămîne doar termenul $u^r I_{[r]} = u^r$, ceilalți termeni fiind nuli datorită faptului că $I_{[k]} = 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $k \neq r$.

Observăm acum că $J_s = 0$ oricare ar fi $s \geqslant r + 1$ căci

$$J_s = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant m} I_{j_1} I_{j_2} \ldots I_{j_s}$$

și cum se realizează numai $r < s$ evenimente, în produsul din sumă este cel puțin un $I_{j_h} = 0$.

Dacă $1 \leqslant s \leqslant r$, atunci în suma pentru toți $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant m$ avem C_r^s termeni nenuli și deci

$$\sum_{s=0}^{m} (u-1)^s J_s = \sum_{s=0}^{r} (u-1)^s C_r^s = [(u-1)+1]^r = u^r$$

care demonstrează complet punctul a).

b) avem conform cu punctul a)

$$\sum_{r=0}^{m} u^r I_{[r]} = \sum_{s=0}^{m} (u-1)^s J_s = \sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} u^k C_s^k \right) J_s$$

și aplicînd valoarea medie și într-un membru și în celălalt, obținem

$$\sum_{r=0}^{m} u^r M(I_{[r]}) = \sum_{s=}^{m} u^r P_{[r]} = \sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} C_s^k u^k \right) M(J_s) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} C_s^k u^k \right) S_s = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{s=k}^{m} (-1)^{s-k} C_s^k S_s \right) u^k.$$

Identificînd coeficienții lui u^r găsim

$$P_{[r]} = \sum_{k=r}^{m} (-1)^{k-r} C_k^r S_k.$$

c) Din egalitatea a) obținem

$$\sum_{k=0}^{m} (u-1)^k J_k = \sum_{k=0}^{m} u^k I_{[k]} = \sum_{k=0}^{m} ((u-1)+1)^k I_{[k]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{h=0}^{k} (u-1)^h C_k^h I_{[k]} = \sum_{h=0}^{m} \sum_{k=h}^{m} (u-1)^h C_k^h I_{[k]}.$$

Dacă luăm acum valoarea medie, obținem

$$\sum_{k=0}^{m} (u-1)^k M(J_k) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k=h}^{m} (n-1)^h C_k^h M(I_{[k]}).$$

Identificînd acum coeficienții lui $(n-1)^r$ obținem

$$S_r = \sum_{k=r}^{m} C_k^r P_{(k)}$$

sau cu notațiile din enunț

$$S_k = \sum_{l=k}^{m} C_l^k P_{(l)}.$$

Pentru partea a doua a egalității, avem

$$P_{(l)} = \sum_{j=l}^{m} P_{[j]} \quad \text{de unde} \quad P_{[l]} = P_{(l)} - P_{(l+1)}$$

și deci

$$S_k = \sum_{l=k}^{m} C_l^k P_{[l]} = \sum_{l=k}^{m-1} C_l^k (P_{(l)} - P_{(l+1)}) + C_m^k P_{(l)} =$$

$$= \sum_{l=k}^{m} (C_l^k - C_{l-1}^k) P_{(l)} = \sum_{l=k}^{m} C_{l-1}^{k-1} P_{(l)}$$

care dovedește complet egalitatea c).

d) Derivăm formal de k ori relația

$$u^R = \sum_{s=0}^{m} (u-1)^s J_s$$

și obținem

$$R(R-1)\ldots(R-k+1)\, u^{R-k} = \sum_{s=k}^{m} s(s-1)\ldots(s-k+1)\,(u-1)^{s-k} J_s.$$

Făcînd pe $u = 1$ obținem

$$R(R-1)\ldots(R-k+1) = k!\, J_k.$$

97. *Fie $k \leqslant r \leqslant m$. Folosind relația*

$$S_k = \sum_{l=k}^{m} C_l^k P_{[l]} = \sum_{l=k}^{m} C_{l-1}^{k-1} P_{(l)},$$

precum și inegalitățile

$$I_{(m)} \leqslant \ldots \leqslant I_{(r)} \leqslant I_{(r-1)} \leqslant \ldots \leqslant I_{(k)}$$

să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{S_k - C_{r-1}^k}{C_m^k - C_{r-1}^k} \leqslant P_{(r)} \leqslant \frac{S_k}{C_r^k}.$$

Să se studieze cazul particular $r = m$; în acest caz partea stîngă se transformă în inegalitatea lui Gumbel, iar partea dreaptă în inegalitatea lui Frechét.

SOLUȚIE. Din $I_{(m)} \leqslant \ldots \leqslant I_{(r)} \leqslant I_{(r-1)} \leqslant \ldots \leqslant I_{(k)}$ rezultă prin trecerea la valoarea medie că

$$P_{(m)} \leqslant \ldots \leqslant P_{(r)} \leqslant P_{(r-1)} \leqslant \ldots \leqslant P_{(k)}$$

(proprietatea de monotonie a valorii medii). Însă pe S_k îl putem scrie

$$S_k = \sum_{t=k}^{r} C_{t-1}^{k-1} P_{(t)} + \sum_{t=r+1}^{m} C_{t-1}^{k-1} P_{(t)}.$$

De aici obținem

$$\sum_{t=r+1}^{m} C_{t-1}^{k-1} P_{(t)} + P_{(r)} \sum_{t=k}^{r} C_{t-1}^{k-1} \leqslant S_k \leqslant \sum_{t=k}^{r-1} C_{t-1}^{k-1} P_{(t)} + P_{(r)} \sum_{t=r}^{m} C_{t-1}^{k-1}.$$

Prima inegalitate ne conduce la

$$P_{(r)} \leqslant \frac{S_k}{\sum_{t=k}^{r} C_{t-1}^{k-1}} = \frac{S_k}{C_r^k}.$$

adică partea a doua a inegalității cerute.

Pentru cealaltă parte observăm că

$$S_k \leqslant \sum_{t=k}^{r-1} C_{t-1}^{k-1} P_{(t)} + P_{(r)} \sum_{t=r}^{m} C_{t-1}^{k-1} \leqslant \sum_{t=k}^{r-1} C_{t-1}^{k-1} + P_{(r)} \sum_{t=r}^{m} C_{t-1}^{k-1} =$$

$$= \sum_{t=k}^{r-1} C_{t-1}^{k-1} + P_{(r)} \left(\sum_{t=k}^{m} C_{t-1}^{k-1} - \sum_{t-k}^{r-1} C_{t-1}^{k-1} \right) = C_{r-1}^{k} + P_{(r)} (C_m^k - C_{r-1}^k)$$

și de aici

$$P_{(r)} \geqslant \frac{S_k - C_{r-1}^k}{C_m^k - C_{r-1}^k}$$

deci și prima parte a inegalității cerute este dovedită.

În cazul particular cînd $r = m$ avem evident,

$$P_{(m)} \leqslant \frac{S_k}{C_m^k}.$$

Pe de altă parte

$$S_k = \sum_{t=k}^{m} C_{t-1}^{k-1} P_{(t)} \leqslant C_{m-1}^{k-1} P_{(m)} + \sum_{t=k}^{m-1} C_{t-1}^{k-1} = C_{m-1}^{k-1} P_{(m)} + C_{m-1}^{k}.$$

Deci

$$P_{(m)} \geqslant \frac{S_k - C_{m-1}^k}{C_{m-1}^{k-1}} = \frac{S_k}{C_{m-1}^{k-1}} - \frac{m-k}{k}.$$

98. *Fie*

$$J(k) = 1 - \frac{J_k}{C_m^k}, \quad \Delta f(k) = f(k+1) - f(k).$$

Să se arate că

a) $\Delta J(k) = \sum_{t=k}^{m-1} \frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_m^t} I_{[t]}$;

b) $I_{[r]} \leqslant \frac{C_m^r}{C_{m-k-1}^{r-k}} \Delta J(k), \qquad k \leqslant r \leqslant m-1$;

c) $\Delta J(k) \geqslant 0$;

Să se cerceteze de aici sistemul de inegalități pentru S_k.

SOLUȚIE. a) Avem din definiția operatorului Δ

$$\Delta J(k) = J(k+1) - J(k) = \frac{J_k}{C_m^k} - \frac{J_{k+1}}{C_m^{k+1}}.$$

Considerăm acum relația $u^R = \sum_{t=0}^{m} u^t I_{[t]}$ pe care o derivăm de k ori

$$R(R-1)\ldots(R-k+1)\,u^{R-k} = \sum_{t=k}^{m} t(t-1)\ldots(t-k+1)\,u^{t-k} I_{[t]}.$$

Făcînd acum pe $u = 1$, obținem

$$R(R-1)\ldots(R-k+1) = \sum_{t=k}^{m} \frac{t!}{(t-k)!} I_{[t]}$$

Însă

$$R(R-1)\ldots(R-k+1) = k!\, J_k$$

și de aici

$$\frac{J_k}{C_m^k} = \sum_{t=k}^{m} \frac{t!\,(m-k)!}{(t-k)!\,m!} I_{[t]}.$$

Așadar

$$\Delta J(k) = \frac{J_k}{C_m^k} - \frac{J_{k+1}}{C_m^{k+1}} = \frac{k!(m-k)!}{m!} I_{[k]} + \sum_{t=k+1}^{m} \left[\frac{(m-k)!\,t!}{(t-k)!\,m!} - \frac{t!\,(m-k-1)!}{(t-k-1)!\,m!}\right] I_{[t]} =$$

$$= \frac{I_{[k]}}{C_m^k} + \sum_{t=k+1}^{m} \frac{(m-k-1)!\,t!\,(m-t)}{(t-k-1)!\,m!\,(t-k)} I_{[t]} = \sum_{t=k}^{m-1} \frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_m^t} I_{[t]}$$

adică relația care ne-am propus s-o dovedim.

b) Dacă $k \leqslant r \leqslant m-1$, atunci putem neglija toți termenii cu $t \neq r$ și obținem

$$\Delta J(k) \geqslant \frac{C_{m-k-1}^{r-k}}{C_m^r} I_{[r]}$$

de unde urmează

$$I_{[r]} \leqslant \frac{C_m^r}{C_{m-k-1}^{r-k}} \Delta J(k).$$

c) $\Delta J(k) \geqslant 0$, inegalitate evidentă dacă ținem seama de punctul a) sau b).

Ca să aflăm sistemul de inegalități pentru S_k, ținem cont de egalitățile

$$S_k = M(J_k); \; J_k = C_m^k - C_m^k J(k).$$

Deci

$$M(J(k)) = \frac{C_m^k - S_k}{C_m^k}.$$

Cum $\Delta J(k) \geqslant 0$ rezultă că

$$1 - \frac{S_{k+1}}{C_m^{k+1}} - 1 + \frac{S_k}{C_m^k} \geqslant 0$$

sau

$$\frac{S_k}{C_m^k} \geqslant \frac{S_{k+1}}{C_m^{k+1}}.$$

Din

$$I_{[r]} \leqslant \frac{C_m^r}{C_{m-k-1}^{r-k}} \Delta J(k), \quad k \leqslant r \leqslant m-1,$$

rezultă

$$M(I_{[r]}) \leqslant \frac{C_m^r}{C_{m-k-1}^{r-k}} M\left(\frac{J_k}{C_m^k} - \frac{J_{k+1}}{C_m^{k+1}}\right),$$

sau

$$P_{[r]} \leqslant \frac{C_m^r}{C_{m-k-1}^{r-k}} \left(\frac{S_k}{C_m^k} - \frac{S_{k+1}}{C_m^{k+1}}\right).$$

99. *Folosind notațiile și definițiile din exercițiile precedente să se arate*

a) $-m\Delta \frac{J(k)}{k} = \sum_{t=k}^{m-1} \frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}} (1 - I_{(t)})$;

b) $1 - I_{(t)} \leqslant \frac{C_{m-1}^{t-1}}{C_{m-k-1}^{t-k}} \left(-m\Delta \frac{J(k)}{k}\right)$;

c) $-m\Delta\frac{J(k)}{k}\geqslant 0.$

Să se deducă de aici un alt sistem de inegalități pentru S_k.

SOLUȚIE. a) Pornind de la definiția operatorului Δ avem

$$-m\Delta\frac{J(k)}{k}=-m\left(\frac{J(k+1)}{k+1}-\frac{J(k)}{k}\right).$$

Cum însă $J(k)=1-\frac{J_k}{C_m^k}$, rezultă atunci

$$-m\Delta\frac{J(k)}{k}=-m\left(\frac{1}{k+1}-\frac{J_{k+1}}{(k+1)\,C_m^{k+1}}-\frac{1}{k}+\frac{J_k}{kC_m^k}\right)=$$

$$=\frac{m}{k(k+1)}-m\left(\frac{J_k}{kC_m^k}-\frac{J_{k+1}}{(k+1)\,C_m^{k+1}}\right).$$

Să luăm separat și să punem sub altă formă fiecare membru al ultimei egalități

$$m\left(\frac{J_k}{kC_m^k}-\frac{J_{k+1}}{(k+1)\,C_m^{k+1}}\right)=\left(\sum_{t=k}^{m}\frac{mC_{t-1}^{k-1}}{kC_m^k}I_{(t)}-\sum_{t=k+1}^{m}\frac{mC_{t-1}^{k}}{(k+1)\,C_m^{k+1}}I_{(t)}\right)=$$

$$=\sum_{t=k}^{m}\frac{C_{t-1}^{k-1}}{C_{m-1}^{k-1}}I_{(t)}-\sum_{t=k+1}^{m}\frac{C_{t-1}^{k}}{C_{m-1}^{k}}I_{(t)}.$$

Dacă ținem cont de egalitățile

$$\frac{C_{t-1}^{k-1}}{C_{m-1}^{k-1}}=\frac{C_{m-k}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}}\quad\text{și}\quad C_{m-k}^{t-k}-C_{m-k-1}^{t-k-1}=C_{m-k-1}^{t-k}$$

obținem

$$m\left(\frac{J_k}{kC_m^k}-\frac{J_{k+1}}{(k+1)\,C_m^{k+1}}\right)=\frac{I_k}{C_{m-1}^{k-1}}+\sum_{t=k+1}^{m}(C_{m-k}^{t-k}-C_{m-k-1}^{t-k-1})\frac{I_{(t)}}{C_{m-1}^{t-1}}=$$

$$=\sum_{t=k}^{m-1}\frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}}I_{(t)}.$$

Pe de altă parte avem egalitatea

$$\frac{m}{k(1+1)}=\sum_{t=k}^{m-1}\frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}}$$

căci

$$\frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}}=\frac{C_{m-t}^{1}C_{t-1}^{k-1}}{kC_{m-1}^{k}},$$

iar

$$\sum_{t=k}^{m-1}\frac{C_{m-1}^{1}C_{t-1}^{k-1}}{kC_{m-1}^{k}}=\frac{m}{k(k+1)}$$

ne conduce la egalitatea

$$\sum_{t=k}^{m-1} C_{m-t}^{1} C_{t-1}^{k-1} = C_m^{k+1}$$

care este adevărată.

Deci

$$-m\Delta \frac{J(k)}{k} = \sum_{t=k}^{m-1} \frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}} (1 - I_{(t)})$$

adică egalitatea ce ne-am propus s-o arătăm.

b) Din egalitatea

$$-m\Delta \frac{J(k)}{m} = \sum_{t=k}^{m-1} \frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}} (1 - I_{(t)})$$

rezultă imediat că

$$-m\Delta \frac{J(k)}{k} \geqslant \frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}} (1 - I_{(t)})$$

deoarece pentru orice $\omega \in \Omega$, $1 - I_{(t)}(\omega) \geqslant 0$ iar $\frac{C_{m-k-1}^{t-k}}{C_{m-1}^{t-1}} > 0$ pentru orice $k \leqslant t \leqslant m-1$.

Deci

$$1 - I_{(t)} \leqslant \frac{C_m^{t-1}}{C_{m-k-1}^{t-k}} \left(-m\Delta \frac{J(k)}{k} \right).$$

c) Din aceleași considerații făcute la punctul b) rezultă imediat că

$$-m\Delta \frac{J(k)}{k} \geqslant 0.$$

D e f i n i ț i e. Evenimentele $B_1, B_2, \ldots, B_m$ le numin permutabile dacă $P(B_{i_1} \ldots B_{i_r} B_{i_{r+1}}^c \ldots B_{i_{r+s}}^c)$ depinde numai de numărul r de evenimente B_i și numărul s de evenimente B_j^c.

Notăm

$$J_{r/s} = \sum I(A_{i_1}) \ldots I(A_{i_r}) I(A_{i_{r+1}}^c) \ldots I(A_{i_{r+s}}^c),$$

$$S_{r/s} = M(J_{r/s}) = \sum P(A_{i_1} \ldots A_{i_r} A_{i_{r+1}}^c \ldots A_{i_{r+s}}^c),$$

$$p_{r/s} = P(B_{i_1} \ldots B_{i_r} B_{i_{r+1}}^c \ldots B_{i_{r+s}}^c).$$

Dacă alegem B_i astfel încît

$$\sum_i P(A_{i_1} \ldots A_{i_r} A_{i_{r+1}}^c \ldots A_{i_{r+s}}^c) = \sum_i P(B_{i_1} \ldots B_{i_r} B_{i_{r+1}}^c \ldots B_{i_{r+s}}^c)$$

atunci

$$p_{r/s} = \frac{S_{r/s}}{C_m^r C_{m-r}^s}.$$

Dacă introducem acum simbolic evenimente independente cu una și aceeași probabilitate p și cu probabilitatea evenimentului complementar $q = 1 - p$, atunci simbolic

$$p_{r/s} = p^r q^s.$$

Metoda simbolică comportă următoarele etape:

I) În orice identitate dată (sau inegalitate verificată întotdeauna) ce conține pe p, q $(0 \leqslant p \leqslant 1,\ q = 1 - p)$, se înlocuiește $p^r q^s$ cu $p_{r/s}$;

II) Mai departe se înlocuiește $p_{r/s}$ cu $S_{r/s}/C_m^r C_{m-r}^s$ și se obține egalitatea (sau inegalitatea corespunzătoare) pentru mărimea $S_{r/s}$.

100. *Plecînd de la egalitatea* $p^r q^s = p^r (1 - p)^s$, *să se arate că*

$$\frac{S_{r/s}}{C_m^{r+s} C_{r+s}^r} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \frac{C_s^i}{C_m^{r+i}} S_{r+i/0};$$

În cazul particular $r + s = m$, *obținem*

$$S_{r/m-r} = P_{(r)}.$$

SOLUȚIE. În egalitatea

$$p_{r/s} = \frac{S_{r/s}}{C_m^r C_{m-r}^s}$$

înlocuim pe $p_{r/s}$ cu ceea ce obținem din scrierea simbolică.

Din scrierea simbolică $p_{r/s} = p^r q^s = p^r (1 - p)^s$ putem scrie mai departe:

$$p_{r/s} = p^r (1-p)^s = p^r \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i p^i = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i p^{r+i} q^0 =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i p_{r+i/0} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i \frac{S_{r+i/0}}{C_m^{r+i} C_{m-r-i}^0}.$$

Prin înlocuire avem:

$$\frac{S_{r/s}}{C_m^r C_{m-r}^s} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \frac{C_s^i}{C_m^{r+i}} S_{r+i/0}.$$

Însă:

$$C_m^r C_{m-r}^s = \frac{m!}{r!\,(m-r)!} \frac{(m-r)!}{s!\,(m-r-s)!} = \frac{m!}{(r+s)!\,(m-r-s)!} \frac{(r+s)!}{r!\,s!} = C_m^{r+s} C_{r+s}^r$$

și deci

$$\frac{S_{r/s}}{C_m^{r+s} C_{r+s}^r} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \frac{C_s^i}{C_m^{r+i}} S_{r+i/0}.$$

În cazul particular cînd $r + s = m$, din egalitatea de mai înainte deducem:

$$S_{r/m-r} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i C_{r+i}^r S_{r+i/0} = \sum_{j=r}^{m} (-1)^{j-r} C_j^r S_{j/0}.$$

Formula (1) o demonstrăm prin inducție. Ea este adevărată pentru $n = 2$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - (A_1 \cap A_2)), \quad A_1 \cap (A_2 - (A_1 \cap A_2)) = \varnothing,$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2),$$

căci

$$A_1 \cap A_2 \subset A_2 \quad \text{și deci} \quad P(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Să presupunem formula (1) adevărată pentru n și să arătăm că se păstrează pentru $n + 1$.

Într-adevăr

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) +$$

$$+ P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) +$$

$$+ \ldots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=r \\ i<j}}^{n+1} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^n \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right).$$

47. *O societate compusă din n perechi — soț și soție — dansează și se presupune că formarea perechilor la dans este egal probabilă. Care este probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soția sa?*

Să se calculeze limita acestei probabilități cînd n tinde către infinit.

SOLUȚIE. Să numerotăm perechile — soț și soție — de la 1 la n și să notăm cu A_k evenimentul că s-a format perechea k — soț și soție.

Atunci

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

deoarece dacă s-au format k perechi — soț și soție, atunci celelalte $n - k$ perechi — bărbat femeie — pot forma $(n - k)!$ perechi de dans.

Scanned with OKEN Scanner

unde prin $P^{(r)}$ am notat probabilitatea ca să se verifice numai r evenimente, indiferent care dintre cele n.

Deoarece evenimentele care au probabilitățile $P^{(r)}$, $P^{(r+1)}$, $P^{(r+2)}$, ..., $P^{(n)}$ sînt incompatibile, rezultă că, notînd cu P_r probabilitatea de a se realiza cel puțin r evenimente, avem

$$P_r = P^{(r)} + P^{(r+1)} + \ldots + P^{(n-1)} + P^{(n)}.$$

Cu notațiile de mai înainte avem încă

$$P_r = T_r - [C_{r+1}^r - 1]\, T_{r+1} + [C_{r+2}^r - C_{r+2}^{r+1} + 1]\, T_{r+2} + \ldots + (-1)^{n-r} [C_n^r - C_n^{r+1} + \ldots + (-1)^{n-r}]\, T_n.$$

Dacă acum folosim unele proprietăți binecunoscute ale combinărilor ajungem la formula

$$P_r = T_r - C_r^1 T_{r+1} + \ldots + (-1)^s C_{r+s-1}^s T_{r+s} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-1}^{n-r} T_n.$$

50. *Să presupunem că avem un grup de n indivizi de vîrste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv. Se cere să se determine:*

a) *probabilitatea ca după trecerea unui an, cel puțin unul dintre cei n indivizi să fie în viață;*

b) *probabilitatea ca după trecerea unui an, cel puțin r persoane să fie în viață.*

SOLUȚIE. a) Să notăm cu E_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, evenimentul că persoana de vîrstă x_k este în viață după trecerea unui an și cu $p_k = P(E_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Se observă că evenimentele E_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sînt compatibile și independente și atunci, dacă notăm cu P_1 probabilitatea evenimentului că după trecerea unui an, cel puțin unul din cei n indivizi să fie în viață, avem

$$P_1 = P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^n P(E_i \cap E_j) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^n p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^n p_i p_j p_k - \ldots + (-1)^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Dacă introducem notațiile

$$T_1 = \sum_{i=1}^n p_i,\ T_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^n p_i p_j,\ \ldots,\ T_n = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_n}}^n p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n}$$

atunci

$$P = T_1 - T_2 + T_3 - \ldots + (-1)^{n-1} T_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

57. *Un număr este ales la întîmplare în intervalul* [0, 1] *de un mecanism aleator, care urmează o lege uniformă în acest interval. Care este probabilitatea ca cea de-a doua zecimală a numărului ales să fie egală cu* $\sqrt{k}$? *dar cu* $\sqrt{3}$?

SOLUȚIE. Să notăm cu B_k mulțimea numerelor din intervalul [0, 1] care au a doua zecimală egală cu $\sqrt{k}$. Atunci un număr $x \in B_k$, dacă și numai dacă $\sqrt{x}$ satisface pentru orice $m = 0, 1, \ldots, 9$ următoarea inegalitate:

$$m + \frac{k}{10} \leqslant 10\sqrt{x} < m + \frac{k+1}{10}$$

sau

$$\frac{1}{100}\left(m + \frac{k}{10}\right)^2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{100}\left(m + \frac{k+1}{10}\right)^2.$$

Lungimea intervalului de mai înainte este egală cu

$$\frac{1}{100}\left(m + \frac{k+1}{10}\right)^2 - \frac{1}{100}\left(m + \frac{k}{10}\right)^2 = \frac{1}{10\,000}(20m + 2k + 1)$$

atunci

$$P(B_k) = \frac{1}{10\,000}\sum_{m=0}^{9}(20m + 2k + 1) = 0{,}091 + 0{,}002k.$$

În particular

$$P(B_3) = \frac{1}{10\,000}\sum_{m=0}^{9}(20m + 7).$$

Făcînd calculele obținem

$$P(B_3) = 0{,}097.$$

58. *Într-o uzină se fabrică lămpi cu incandescență. La aceste lămpi întîlnim* 2% *defecte de fabricație și* 5% *defecte de montaj.*

Să se calculeze probabilitatea ca o lampă să fie înlăturată ca necorespunzătoare.

SOLUȚIE. Fie A evenimentul care constă în faptul că o lampă să fie eliminată datorită unui defect de fabricație și B evenimentul că ea să fie eliminată datorită unui defect de montaj.

Probabilitatea care ne interesează este probabilitatea evenimentului $A \cup B$. Cum A și B sînt evenimente compatibile avem

$$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cum A și B sînt evenimente independente rezultă că avem

$$p = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B),$$

$$P(A) = 0{,}02;\ P(B) = 0{,}05,\ P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0{,}001,$$

$$P = 0{,}02 + 0{,}05 - 0{,}001 = 0{,}069 = 6{,}9\%.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Probabilitatea ca bila albă să fie extrasă din prima structură este

$$P_A(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{121}{360}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{360}{121} = \frac{40}{121}.$$

Ca să aparțină celei de a doua structuri, este

$$P_A(A_2) = \frac{P(A_2) P_{A_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{121}{360}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{360}{121} = \frac{36}{121}.$$

Ca să aparțină celei de a treia structuri, este

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3) P_{A_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{121}{360}} = \frac{360}{121} \quad \frac{1}{8} = \frac{45}{121}.$$

65. *Două clase A și B cu cîte* 30 *elevi au, respectiv cîte* 15 *elevi buni,* 10 *mediocri,* 5 *slabi și* 10 *buni,* 12 *mediocri,* 8 *slabi. Un profesor ascultă la întîmplare cîte un elev din fiecare clasă, și premiază clasa al cărei elev se dovedește mai bun. Se cere să se calculeze :*

a) *probabilitatea ca să fie premiată clasa A ;*

b) *probabilitatea ca să fie premiată clasa B.*

SOLUȚIE. a) Profesorul ascultînd la întîmplare un elev din clasa A și un elev din clasa B se vede că avem

$$15 \cdot 20 + 10 \cdot 8 = 380,$$

posibilități în care elevul din clasa A este mai bun ca un elev din clasa B, întrucît aceasta se întîmplă cînd este ascultat un elev din cei 15 buni din clasa A și un elev din cei 20 mediocri și slabi din clasa B sau cînd este ascultat un elev din cei 10 mediocri din clasa A și un elev din cei 8 slabi din clasa B.

Analog avem

$$10 \cdot 15 + 12 \cdot 5 = 210$$

în care elevul din clasa B este mai bun decît cel din clasa A.

Cum probabilitatea ca un elev să fie luat dintr-o clasă sau alta este $\frac{1}{2}$, prin aplicarea formulei lui Bayes găsim

$$P = \frac{\frac{1}{20} \cdot 380}{\frac{1}{2} \cdot 380 + \frac{1}{2} \cdot 210} = \frac{38}{59}.$$

13. *Să presupunem că durata în minute a unei convorbiri telefonice la distanță mare este dată de următoarea funcție de repartiție:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} e^{-\left[\frac{x}{3}\right]} & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases}$$

unde $[y]$ *este cel mai mare întreg, mai mic sau egal cu* y. *Se cere să se determine probabilitatea ca o convorbire:*

a) *să dureze* 6 *minute sau mai mult de* 6 *minute;*

b) *să fie mai mică decît* 4 *minute;*

c) *să fie egală cu* 3 *minute;*

d) *să fie mai mică decît* 9 *minute dat fiind faptul că a fost mai mare de* 5 *minute;*

e) *să fie mai mare de* 5 *minute, dacă a fost mai mică de* 9 *minute.*

SOLUȚIE. a) Se știe că

$$P(f \geqslant x) = 1 - P(f < x) = 1 - F(x),$$

de unde

$$P(f \geqslant 6) = 1 - F(6) = \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^{-[2]} = 0{,}135.$$

b) Avem

$$P(f < 4) = F(4) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}684.$$

c) $P(f = 3) = F(3 + 0) - F(3 - 0)$

unde

$$F(3 + 0) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} F(x); \quad F(3 - 0) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} F(x).$$

Rezultă că

$$P(f = 3) = \left(1 - \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-1}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-\left[\frac{3}{3}\right]}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) = 0{,}316.$$

d) Se observă că

$$P(f < 9 / f > 5) = \frac{P(5 < f < 9)}{P(f > 5)} = \frac{P(f < 9) - P(f < 5) - P(f = 5)}{1 - P(f \leqslant 5)} =$$

$$= \frac{P(f < 9) - P(f < 5) - P(f = 5)}{1 - P(f < 5) - P(f = 5)}.$$

Cum însă $P(f = 5) = 0$, rezultă că

$$P(f < 9/f > 5) = \frac{F(9) - F(5)}{1 - F(5)},$$

care se calculează ca mai înainte.

e) Avem

$$P(f > 5/f < 9) = \frac{P(5 < f < 9)}{P(f < 9)} = \frac{F(9) - F(5) - P(f = 5)}{F(9)}.$$

Calculul se face ca la punctele a, b și c.

14. *Să presupunem că timpul de așteptare în minute la o stație de autobuz are funcția de repartiție dată de:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0, \\ \frac{x}{2} & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{x}{4} & \text{pentru } 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & \text{pentru } 4 \leqslant x. \end{cases}$$

Se cere:

a) densitatea de repartiție corespunzătoare;

b) care este probabilitatea ca un călător să aștepte:

— *mai mult de trei minute;*

— *mai puțin decît trei minute;*

— *între un minut și trei minute.*

c) *care este probabilitatea condiționată ca un călător să aștepte:*

— *mai mult de trei minute, dat fiind că a așteptat mai mult de un minut;*

— *mai puțin de trei minute, dat fiind că a așteptat mai mult de un minut.*

SOLUȚIE. a) Densitatea de repartiție este dată de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4} & \text{pentru } 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

b) Probabilitatea ca să aștepte mai mult de trei minute este dată de:

$$P(\xi > 3) = 1 - P(\xi \leqslant 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$$

Probabilitatea ca să aștepte mai puțin de trei minute este egală cu

$$P(\xi \leqslant 3) = F(3) = \frac{3}{4};$$

iar probabilitatea ca să aștepte între un minut și trei minute este

$$P(1 < \xi \leqslant 3) = F(3) - F(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

c) Calculăm probabilitățile condiționate

$$P(\xi > 3/\xi > 1) \text{ și } P(\xi \leqslant 3/\xi > 1).$$

Se observă că

$$P(\xi > 3/\xi > 1) = \frac{P(\xi > 3, \xi > 1)}{P(\xi > 1)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(1)} = \frac{1}{2}$$

iar

$$P(\xi \leqslant 3/\xi > 1) = \frac{P(\xi \leqslant 3, \xi > 1)}{P(\xi > 1)} = \frac{P(1 < \xi \leqslant 3)}{1 - P(\xi \leqslant 1)} = \frac{F(3) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{1}{2}.$$

15. *Să presupunem că un fenomen aleator urmează o lege normală de parametri* $m = 2$ *și* $\sigma = 2$.

Se cere să se calculeze:

a) $P(0 \leqslant f \leqslant 3)$,

b) $P(|f| \leqslant 1)$,

c) $P(-1 \leqslant f \leqslant 1/0 \leqslant f \leqslant 3)$.

SOLUȚIE. Se știe că, dacă f urmează o lege normală de parametrii m și σ, atunci

$$P(a \leqslant f \leqslant b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right),$$

unde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

este funcția lui Laplace.

Atunci

$$\text{a) } P(0 \leqslant f \leqslant 3) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^3 e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-2)^2}{2^2}} dx = \Phi\left(\frac{3-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi(1) - 1$$

utilizînd tabelele se obține

$$P(0 \leqslant f \leqslant 3) = 0{,}533;$$

$$\text{b) } P(|f| \leqslant 1) = \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-2}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}242;$$

$$\text{c) } P(-1 \leqslant f \leqslant 1/0 \leqslant f \leqslant 3) = \frac{P(0 \leqslant f \leqslant 1)}{P(0 \leqslant f \leqslant 3)} =$$

$$= \frac{\Phi[(1-2)/2] - \Phi[(0-2)/2]}{0{,}533} = 0{,}281.$$

16. *Să studiem funcționarea unei mașini de țesut. Fie* $\frac{\Delta t}{\lambda}$ *probabilitatea ca în intervalul* Δt *să se rupă un fir din țesătură și* $P(t)$ *probabilitatea ca pînă la momentul* t *să nu avem ruperi de fire. Se cere să se calculeze densitatea de repartiție a timpului de funcționare a acestei mașini.*

SOLUȚIE. Dacă $\frac{\Delta t}{\lambda}$ este probabilitatea ca firul să se rupă în intervalul de timp Δt, probabilitatea contrarie va fi $1 - \frac{\Delta t}{\lambda}$, iar probabilitatea ca pînă la momentul $t + \Delta t$ să nu avem ruperi de fire va fi $P(t + \Delta t)$. Atunci:

$$P(t + \Delta t) = P(t)\left(1 - \frac{\Delta t}{\lambda}\right)$$

sau

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{\lambda} P(t).$$

Dacă $\Delta t \to 0$, obținem:

$$P'(t) = -\frac{1}{\lambda} P(t),$$

de unde

$$P(t) = Ce^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Rezultă că probabilitatea ca pînă la momentul t să nu avem ruperi de fire, iar în intervalul Δt să se rupă un fir va fi dată de

$$Ce^{-\frac{t}{\lambda}}\frac{\Delta t}{\lambda}.$$

Constanta C se determină imediat, deoarece trebuie să avem

$$C\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\lambda}}\cdot\frac{dt}{\lambda} = 1,$$

de unde

$$f(t) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}},$$

cu alte cuvinte timpul de funcționare are o densitate de repartiție exponențială.

17. *Variabila aleatoare ξ urmează o lege Poisson cu parametrul η care este la rîndul său o variabilă aleatoare continuă a cărei densitate de repartiție este*

$$h(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dacă } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

Să se afle repartiția variabilei aleatoare ξ, necondiționată de η.

SOLUȚIE. Din faptul că ξ urmează o lege Poisson cu parametrul η (variabila aleatoare), deducem că repartiția variabilei ξ condiționată de faptul că η a luat valoarea y și pe care o notăm $g(x/y)$ este

$$g(x/y) = e^{-y}\frac{y^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cum densitatea lui η este $h(y)$ dată în enunț, urmează că

$$g(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty g(x/y)h(y)dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y}y^x}{x!}e^{-y}\,dy,$$

unde $f(x, y)$ este repartiția comună a variabilelor ξ și η.

Dacă în ultima integrală facem schimbarea $y = \frac{u}{2}$, obținem

$$g(x) = \frac{1}{x!}\int_0^\infty e^{-2y}y^x\,dy = \frac{1}{x!}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{2}\right)^x\frac{du}{2} =$$

$$= \frac{1}{x!\,2^{x+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^x\,du = \frac{\Gamma(x+1)}{x!\,2^{x+1}}.$$

De aici deducem

$$g(x) = \frac{1}{2^{x+1}}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Se vede imediat că

$$\sum_{x=0}^{\infty} g(x) = 1.$$

18. *Fie* ξ_1 *și* ξ_2 *două variabile aleatoare avînd densitate de repartiție*

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dacă } 0 \leqslant x_1 \leqslant 2, \\ & \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 2, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Să se determine:

a) $P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1)$,

b) $P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1)$,

c) $P(\xi_1 + \xi_2 > 2)$.

SOLUȚIE. a) Avem

$$P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1) = \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1\, dx_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 = \frac{1}{4}.$$

b) Avem

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1) = \iint\limits_{\{(x_1, x_2),\ x_1 + x_2 \leqslant 1\}} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - x_1)\, dx_1,$$

de unde

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1) = \frac{1}{8}.$$

c) Se știe că

$$P(\xi_1 + \xi_2 > 2) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 2).$$

Însă

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 2) = \iint\limits_{\{(x_1, x_2),\, x_1 + x_2 \leqslant 2\}} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 dx_1 \int_0^{2-x_1} dx_2 = \frac{1}{4}\int_0^2 (2 - x_1)\, dx_1 = \frac{1}{2},$$

de unde

$$P(\xi_1 + \xi_2 > 2) = \frac{1}{2}.$$

19. *În condițiile exercițiului precedent, să se calculeze:*

a) $P(\xi_1 < 2\xi_2)$,

b) $P(\xi_1 > 1)$.

SOLUȚIE. a) Avem

$$P(\xi_1 < 2\xi_2) = \iint\limits_{\{(x_1, x_2),\, x_1 < 2x_2\}} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 dx_2 \int_0^{2x_2} dx_1 = \frac{1}{4}\int_0^2 2x_2\, dx_2,$$

de unde

$$P(\xi_1 < 2\xi_2) = 1.$$

b) Se știe că

$$P(\xi_1 > 1) = 1 - P(\xi_1 \leqslant 1).$$

Însă

$$P(\xi_1 \leqslant 1) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx_1 = \frac{1}{2}.$$

Deci

$$P(\xi_1 > 1) = \frac{1}{2}.$$

20. *Fie ξ_1 și ξ_2 două variabile aleatoare, având densitatea de repartiție*

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1 + x_2)} & \text{dacă } x_1 \geqslant 0 \text{ și } x_2 \geqslant 0, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Să se calculeze:

a) $P(\xi_1 \leqslant 1, \xi_2 \leqslant 1)$; b) $P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1)$; c) $P(\xi_1 + \xi_2 > 2)$

SOLUȚIE. a) Avem

$$P(\xi_1 \leqslant 1, \xi_2 \leqslant 1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x_1+x_2)}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 e^{-x_1}\, dx_1 \int_0^1 e^{-x_2}\, dx_2 = (e^{-1}-1)\,(e^{-1}-1) = (e^{-1}-1)^2.$$

b) Avem

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1) = \int_0^1 e^{-x_1}\, dx_1 \int_0^{1-x_1} e^{-x_2}\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 e^{-x_1}\,(1 - e^{x_1-1})\, dx_1 = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x_1}\, dx_1,$$

de unde

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1) = 1 - 2e^{-1}.$$

c) Se observă că

$$P(\xi_1 + \xi_2 > 2) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 2).$$

Însă

$$P(\xi_1 + \xi_2 \leqslant 2) = \int_0^2 e^{-x_1}\, dx_1 \int_0^{2-x_1} e^{-x_2}\, dx_2 = 1 - 2e^{-2}$$

de unde

$$P(\xi_1 + \xi_2 > 2) = 2e^{-2}.$$

21. *Se dă densitatea de repartiție bidimensională*:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & \text{dacă } x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Se cere să se determine:

a) $P(\xi_2 > 1/\xi_1 \leqslant 1)$; b) $P(\xi_1 > 1/\xi_2 > 1)$.

SOLUȚIE. a) Să notăm

$$A = \{\xi_2 > 1\},\ B = \{\xi_1 \leqslant 1\}.$$

Probabilitatea care trebuie calculată se scrie

$$P(A/B).$$

Se știe că

$$P(A^c/B) = 1 - P(A/B),$$

de unde rezultă

$$P(A/B) = 1 - P(A^c/B).$$

Pe de altă parte

$$P(A^c/B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

sau

$$P(\xi_2 \leqslant 1/\xi_1 \leqslant 1) = \frac{P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1)}{P(\xi_1 \leqslant 1)}.$$

Din exercițiul precedent

$$P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1) = (1 - e^{-1})^2.$$

Atunci

$$f(x_1) = e^{-x_1}$$

și deci

$$P(B) = P(\xi_1 \leqslant 1) = \int_0^1 e^{-x_1}\,dx_1 = 1 - e^{-1}.$$

Urmează că

$$P(\xi_2 > 1/\xi_1 \leqslant 1) = 1 - \frac{(1 - e^{-1})^2}{1 - e^{-1}} = e^{-1}.$$

b) Fie

$$A = \{\xi_1 > 1\},\ B = \{\xi_2 > 1\}.$$

Deoarece

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B),$$

rezultă că

$$P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c) - 1 + P(A) + P(B).$$

Avem

$$P(\xi_1 > 1/\xi_2 > 1) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

sau

$$P(A/B) = \frac{P(A^c \cap B^c) - 1 + P(A) + P(B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1) - 1 + [1 - P(\xi_1 \leqslant 1)] + [1 - P(\xi_2 \leqslant 1)]}{1 - P(\xi_2 \leqslant 1)} =$$

$$= \frac{P(\xi_1 \leqslant 1,\ \xi_2 \leqslant 1) - P(\xi_1 \leqslant 1) - P(\xi_2 \leqslant 1) + 1}{1 - P(\xi_2 \leqslant 1)}.$$

Calculul probabilităților de mai înainte se face ca la punctul a.

22. *Fie* ξ_1 *și* ξ_2 *două variabile aleatoare având densitatea de repartiție*

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} \text{ dacă } x_1 \geqslant 0 \text{ și } x_2 \geqslant 0, \\ 0 \qquad \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Să se determine:

a) $P(\xi_1 < 2\,\xi_2)$,

b) $P(\xi_1 > 1)$,

c) $P(\xi_1 = \xi_2)$.

SOLUȚIE: a) Avem

$$P(\xi_1 < 2\,\xi_2) = \iint\limits_{\left\{(x_1, x_2),\ \frac{x_1}{x_2} < 2\right\}} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{\frac{x_1}{x_2} < 2} e^{-(x_1+x_2)}\,dx_1\,dx_2 = \int_0^\infty e^{-x_2}\,dx_2 \int_0^{2x_2} e^{-x_1}\,dx_1 =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x_2}(1 - e^{-2x_2})\,dx_2 = \int_0^\infty e^{-x_2}\,dx_2 - \int_0^\infty e^{-3x_2}\,dx_2,$$

de unde

$$P(\xi_1 < 2\,\xi_2) = \frac{2}{3}.$$

b) Determinăm mai întîi densitatea de repartiție a variabilei aleatoare ξ_1. Avem

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2)}\,dx_2 = e^{-x_1}.$$

Știm că

$$P(\xi_1 > 1) = 1 - P(\xi_1 \leqslant 1).$$

Însă

$$P(\xi_1 \leqslant 1) = \int_0^1 e^{-x_1}\,dx_1 = 1 + e^{-1},$$

de unde

$$P(\xi_1 > 1) = e^{-1}.$$

c) Avem

$$P(\xi_1 = \xi_2) = \iint\limits_{\{(x_1, x_2),\, x_1 = x_2\}} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Rezultă imediat că

$$P(\xi_1 = \xi_2) = 0.$$

23. *Să se arate că*

$$\sum_{k=m}^{n} P_{k,n} = \frac{\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx}{B(m, n-m+1)}$$

unde $P_{k,n}$ sînt probabilitățile corespunzătoare legii binomiale, iar $B(u, v)$ funcția beta.

SOLUȚIE. Fie

$$\psi(p) = P_{m,n} + P_{m+1,n} + \cdots + P_{n,n} = \sum_{k=m}^{n} P_{k,n}$$

unde

$$P_{k,n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k q^{n-k}.$$

Să considerăm p ca variabilă independentă și să derivăm funcția $\psi(p)$. Avem

$$\psi'(p) = \sum_{k=m}^{n} P'_{k,n}.$$

Însă

$$P'_{k,n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,kp^{k-1}q^{n-k} - \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\,p^k q^{n-k-1} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\,p^{k-1}q^{n-k} - \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\cdot p^k q^{n-k-1} =$$

$$= n\,[P_{k-1,n-1} - P_{k,n-1}]$$

iar, pentru $k = n$

$$P'_{n,n} = nP_{n-1,n-1}.$$

Deci

$$\psi'(p) = n \sum_{k=m}^{n} (P_{k-1,\,n-1} - P_{k,\,n-1}) = n\{(P_{m-1,\,n-1} - P_{m,\,n-1}) +$$

$$+ (P_{m,\,n-1} - P_{m+1,\,n-1}) + \cdots + P_{n-1,\,n-1}\} = nP_{m-1,\,n-1}$$

sau

$$\psi'(p) = n \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m+1)!} p^{m-1} q^{n-m} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} p^{m-1} q^{n-m}.$$

Cum $\psi(0) = 0$, avem

$$\psi(p) = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} \int_0^p x^{m-1} (1-x)^{n-m}\,dx,$$

sau

$$\sum_{k=m}^{n} P_{k,\,n} = \frac{\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx}{B(m,\,n-m+1)}.$$

24. *Să se arate că funcția de repartiție pentru o lege binomială se poate exprima sub forma*

$$F(r) = \frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} \int_0^q x^{n-r-1} (1-x)^r dx.$$

SOLUȚIE. Din definiția funcției de repartiție rezultă că

$$F(r) = P(\alpha \leqslant r) = \sum_{\alpha=0}^{r} P_n(\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{r} C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!} p^\alpha q^{n-\alpha} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{(r-\alpha)!\,(n-r-1)!}{(n-\alpha)!} p^\alpha q^{n-\alpha}.$$

Deoarece

$$\int_0^1 x^{h-1} (1-x)^{k-1}\,dx = \frac{\Gamma(h)\cdot\Gamma(k)}{\Gamma(h+k)} = \frac{(h-1)!\,(k-1)!}{(h+k-1)!}$$

avem

$$\frac{(r-\alpha)!\,(n-r-1)!}{(n-\alpha)!} = \int_0^1 x^{r-\alpha} (1-x)^{n-r-1}\,dx,$$

de unde

$$F(r) = \frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{r!}{\alpha!\,(r-\alpha)!} p^{\alpha} q^{n-\alpha} \int_0^1 x^{r-\alpha} (1-x)^{n-r-1} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} q^{n-r} \int_0^1 (1-x)^{n-r-1} \sum_{\alpha=0}^{r} \frac{r!}{\alpha!\,(r-\alpha)!} p^{\alpha} x^{r-\alpha} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} q^{n-r} \int_0^1 (1-x)^{n-r-1} (p+qx)^r \mathrm{d}x.$$

Prin schimbarea de variabilă

$$p + qx = 1 - y$$

obținem

$$F(r) = -\frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} \int_q^0 y^{n-r-1} (1-y)^r \mathrm{d}y$$

sau

$$F(r) = \frac{n!}{(n-r-1)!\,r!} \int_0^q x^{n-r-1} (1-x)^r \mathrm{d}x.$$

25. *Să se arate că repartiția Poisson poate fi aproximată cu o repartiție gamma.*

SOLUȚIE. Să presupunem $\beta=1$ și $\mu>0$. Atunci, notînd cu $G(\mu)$ funcția de repartiție a legii gamma, avem

$$G(\mu) = P(x \geqslant \mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \mathrm{d}x$$

Integrînd prin părți, obținem

$$G(\mu) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha} \mathrm{d}(-e^{-x}) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x} \Big|_{\mu}^{\infty} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \mu^{\alpha} e^{-\mu} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^{\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{d}(-e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \mu^{\alpha} e^{-\mu} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha-1} e^{-\mu} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_{\mu}^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Continuînd integrarea prin părți vom obține:

$$G(\mu) = e^{-\mu} \left(\frac{\mu^{\alpha}}{\alpha!} + \frac{\mu^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \cdots + \frac{\mu^2}{2!} + \mu + 1 \right).$$

Deoarece funcția de repartiție a legii Poisson este

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!},$$

rezultă că

$$F(\alpha) = G(\mu).$$

26. *Să se arate că dacă variabila aleatoare* ξ *urmează o repartiție exponențială, atunci*

$$P(\xi < y + x / \xi \geqslant y) = P(\xi < x), \tag{1}$$

unde $x > 0$ *și* $y \geqslant 0$.

SOLUȚIE. Din definiția probabilității condiționate, avem

$$P(\xi < y + x / \xi \geqslant y) = \frac{P(y \leqslant \xi < y + x)}{P(\xi \geqslant y)},$$

iar din proprietățile funcției de repartiție

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

unde $x_2 > x_1$.

Urmează că

$$P(\xi < y + x | \xi \geqslant y) = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}.$$

Ținînd seama de cele de mai înainte relația (1) este echivalentă cu

$$\frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)} = F(x).$$

Punînd $\Phi(x) = 1 - F(x)$, obținem

$$\Phi(x+y) = \Phi(x)\,\Phi(y).$$

Soluția acestei ecuații funcționale este

$$\Phi(x) = e^{-\lambda x}, \ \lambda > 0.$$

Deci

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

27. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare care urmează o repartiție uniformă în intervalul* $[-1, 1]$. *Să se determine densitatea de repartiție corespunzătoare variabilelor aleatoare*:

a) $\eta = e^{\xi}$;

b) $\eta = 2\xi + 1$;

c) $\eta = 2\xi^2 + 1$.

SOLUȚIE. În acest caz

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă} \quad x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin [-1, 1], \end{cases}$$

iar

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{dacă} \quad x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{dacă} \quad x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

a) Avem

$$F_\eta(y) = P(e^\xi < y) = F_\xi(\ln y),$$

de unde rezultă că

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & \text{dacă} \quad e^{-1} < y < e, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

b) $$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P\left(\xi < \frac{y-1}{2}\right) = F_\xi\left(\frac{y-1}{2}\right),$$

deci

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dacă} \quad -1 < y < 3, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

c) Avem $$F_\eta(y) = P(y < \eta) = P\left(\xi < \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = F_\xi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

de unde

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{dacă} \quad -1 < y < 3, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

28. *Să se determine densitatea de repartiție a variabilei aleatoare* $\eta = e^\xi$ *unde variabila aleatoare* ξ *urmează o lege normală de parametrii* m *și* σ.

SOLUȚIE. Variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

iar funcția de repartiție

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Atunci funcția de repartiție a variabilei aleatoare η este dată de

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(e^\xi < y) = P(\xi < \ln y) = F_\xi(\ln y),$$

de unde

$$F_\eta(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln y} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt.$$

Diferențiind în raport cu y, obținem

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{y},$$

sau

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}.$$

29. *Fie ξ_1 și ξ_2 două variabile aleatoare cu densitatea de repartiție $f(x_1, x_2)$.*
Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei:

a) $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$;
b) $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

SOLUȚIE. a) Avem

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } y < 0, \\ \iint\limits_{\{(x_1, x_2);\, x_1^2 + x_2^2 \leqslant y^2\}} f(x_1, x_2)\,dx, dx_2 & \text{dacă } y > 0. \end{cases}$$

Trecînd la coordonate polare

$$x_1 = r\cos\theta,$$
$$x_2 = r\sin\theta,$$

obținem

$$F_\eta(y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^y f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr.$$

Diferențiind în raport cu y, avem

$$f_{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(y) = \begin{cases} y\int_0^{2\pi} f(y\cdot\cos\theta, y\cdot\sin\theta)\, d\theta, & \text{dacă } y > 0, \\ 0, & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

b) Se știe că dacă variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiție $f_\xi(x)$, atunci variabila $\eta = \xi^2$ are densitatea

$$f_{\xi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_\xi(\sqrt{y}) - f_\xi(-\sqrt{y})] & \text{dacă } y > 0, \\ 0 & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

Atunci rezultă imediat că

$$f_{\xi_1^2 + \xi_2^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{y}\cos\theta, \sqrt{y}\sin\theta)\, d\theta, & \text{dacă } y > 0, \\ 0, & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

30. *Socotind că legea de repartiție pînă la cea mai apropiată stea este* $F(r) = 1 - e^{-\frac{4}{3}\pi\lambda r^3}$ *și că asupra stelei date acționează numai forța gravitației stelei celei mai apropiate, egală cu* $\tau = \frac{k}{r^2}$, *unde* $k =$ *constant, să se afle densitatea de repartiție* $\varphi(\tau)$ *a forței* τ *și să se arate că* $\varphi(\tau)$ *descrește ca* $\tau^{-\frac{5}{2}}$ *pentru* τ *mare.*

SOLUȚIE. Avem

$$\varphi(\tau) = F'(r)\left|\frac{dr}{d\tau}\right| = 4\pi\lambda r^2 e^{-\frac{3}{4}\pi\lambda r^3}\left|\frac{dr}{d\tau}\right| .$$

dar

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{r^3}{2k} .$$

Deci $\varphi(\tau) = F'(r)\left|\frac{dr}{d\tau}\right| = 4\pi\lambda r^2 e^{-\frac{4}{3}\pi\lambda r^3}\frac{r^3}{2k} =$

$$= 2\pi\lambda k^{\frac{3}{2}}\tau^{-\frac{5}{2}}\exp\left\{-\frac{4}{3}\pi\lambda\left(\frac{k}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} .$$

Dacă τ este suficient de mare, atunci

$$\varphi(\tau) \approx 2\pi\lambda k^{\frac{3}{2}}\tau^{-\frac{5}{2}} .$$

31. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiție este*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{pentru} \quad |x| < \frac{\pi}{2} , \\ 0 & \text{pentru} \quad |x| > \frac{\pi}{2} . \end{cases}$$

Să se găsească densitatea de repartiție corespunzătoare variabilei $\eta = \cos\xi$.

SOLUȚIE. Construim graficul funcției $y = \cos x$ (fig. 11). În intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $y = \cos x$ nu este monotonă.

Avem

$$F_1(y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

Exprimăm pe x_1 și x_2 cu ajutorul lui y

$$x_1 = -\arccos y\,;\; x_2 = \arccos y,$$

de unde

$$F_1(y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} f(x)\,dx + \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx.$$

Pentru a găsi densitatea de repartiție $g(y)$ a variabilei η vom deriva $F_1(y)$ în raport cu y

$$g(y) = F_1'(y) = f(-\arccos y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f(\arccos y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

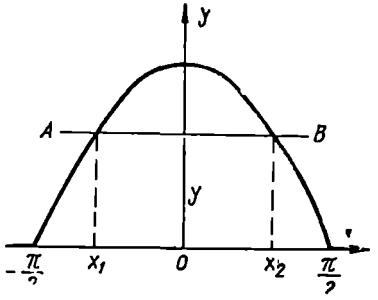


Fig. 11.

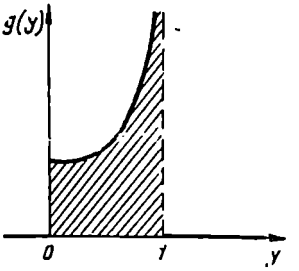


Fig. 12.

Ținînd seama că densitatea de repartiție a variabilei ξ este $\frac{1}{\pi}$, rezultă

$$g(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

$g(y)$ este pozitivă numai între limitele 0 și 1, adică între acele limite în care se schimbă $\eta = \cos\xi$ pentru argumentul ξ cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$.

Graficul funcției $g(y)$ este dat în fig. 12. Pentru $y = 1$, $g(y)$ are o ramură la infinit.

32. *Fie* ξ_1 *și* ξ_2 *două variabile aleatoare continue și*

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2,$$
$$\eta_2 = \xi_1 - \xi_2.$$

Să se arate că pentru orice u_1, u_2 *avem*

$$f_{\eta_1,\eta_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} f_{\xi_1,\xi_2}\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1-u_2}{2}\right).$$

SOLUȚIE. Se știe că dacă

$$\eta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2),$$
$$\eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2),$$

unde ξ_1 și ξ_2 sînt variabile aleatoare, atunci și η_1, η_2 sînt variabile aleatoare.

Dacă

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci

$$f_{\eta_1, \eta_2}(y_1, y_2) = f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) \cdot |J(x_1, x_2)|^{-1}$$

În cazul exemplului considerat avem

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2.$$

Soluția ecuațiilor

$$u_1 = x_1 + x_2, \quad u_2 = x_1 - x_2.$$

este dată de

$$x_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}; \quad x_2 = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

iar

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

și deci

$$f_{\eta_1, \eta_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} f_{\xi_1, \xi_2}\left(\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{u_1 - u_2}{2}\right).$$

33. *Fie* ξ_1 *și* ξ_2 *două variabile aleatoare și*

$$\eta_1 = \xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \sin \alpha$$
$$\eta_2 = -\xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha$$

pentru orice α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Să se arate că

$$f_{\eta_1, \eta_2}(y_1, y_2) = f_{\xi_1, \xi_2}(y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha, y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha).$$

SOLUȚIE. Avem

$$y_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha,$$
$$y_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.$$

Rezolvînd acest sistem obținem

$$x_1 = y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha,$$
$$x_2 = y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha,$$

iar

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Atunci

$$f_{\eta_1,\eta_2}(y_1, y_2) = f_{\xi_1,\xi_2}(y_1\cos\alpha - y_2\sin\alpha, y_1\sin\alpha + y_2\cdot\cos\alpha).$$

34. *Fie*

$$f = A\sin\theta$$

unde A este o constantă pozitivă dată și θ *o variabilă aleatoare care urmează o repartiție uniformă în intervalul* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Să se determine funcția de repartiție* $F_f(x)$ *pentru* $|x| < A$.

SOLUȚIE. Din definiția funcției de repartiție rezultă că

$$F_f(x) = P(A\cdot\sin\theta \leqslant x) = P\left(\sin\theta \leqslant \frac{x}{A}\right) =$$

$$= P\left(\theta \leqslant \sin^{-1}\frac{x}{A}\right) = F_0\left(\sin^{-1}\frac{x}{A}\right).$$

Cum însă funcția de repartiție a variabilei θ este

$$F_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} dx$$

avem

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{x}{A} + \frac{\pi}{2}\right],$$

iar densitatea de repartiție corespunzătoare este dată de

$$\rho_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi A}\left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, & |x| < A, \\ 0 \quad \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

35. *Fie* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *variabile aleatoare independente, fiecare având o repartiție uniformă, dată de*

$$P(\xi_i = k) = \frac{1}{N}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Notăm cu

$$\eta_1 = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \quad \eta_2 = \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Să se afle repartiția variabilelor aleatoare η_1 *și* η_2.

SOLUȚIE. Evident că și variabilele aleatoare η_1 și η_2 sînt tot discrete și iau tot N valori.

Să calculăm

$$P(\eta_1 \leqslant k) = P(\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqslant k) =$$

$$P(\xi_1 \leqslant k,\ \xi_2 \leqslant k, \ldots, \xi_n \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n,$$

întrucît

$$P(\xi_j \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} P(\xi_j = i) = \frac{k}{N}.$$

Mai departe avem

$$P_{\cdot}(\eta_1 = k) = P(\eta_1 \leqslant k) - P(\eta_1 \leqslant k-1) = \frac{1}{N^n}[k^n - (k-1)^n].$$

Pentru partea a doua a problemei găsim

$$P(\eta_2 \geqslant k) = P(\min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geqslant k) =$$

$$= P(\xi_1 \geqslant k,\ \xi_2 \geqslant k, \ldots, \xi_n \geqslant k) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \geqslant k) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (1 - P(\xi_j \leqslant k-1)) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n.$$

Urmează deci că

$$P(\eta_2 = k) = P(\eta_2 \geqslant k) - P(\eta_2 \geqslant k+1) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n.$$

36. *Fie* ξ_1 *și* ξ_2 *două variabile aleatoare independente și cu repartițiile date de*

$$P(\xi_i = k) = pq^k,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ i = 1, 2.$$

Notăm cu $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$.

a) *Să se afle repartiția variabilei aleatoare* η.

b) *Să se afle repartiția vectorului aleator* (η, ξ_1).

SOLUȚIE. Este evident că variabila aleataore η poate lua tot valorile 0, 1, 2, ...

Atunci

$$P(\eta = k) = P(\max(\xi_1, \xi_2) = k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P(\xi_1 = k, \xi_2 = j) + \sum_{j=0}^{k-1} P(\xi_1 = j, \xi_2 = k).$$

Ținînd cont acum că variabilele aleatoare ξ_1, ξ_2 sînt independente și că $P(\xi_i = k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $i = 1, 2$, avem

$$P(\eta = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi_1 = k) P(\xi_2 = j) + \sum_{j=0}^{k-1} P(\xi_1 = j) P(\xi_2 = k) =$$

$$= p^2 q^k \sum_{j=0}^{k} q^j + p^2 q^k \sum_{j=0}^{k-1} q^j = p^2 q^{2k} + 2p^2 q^k \sum_{j=0}^{k-1} q^j =$$

$$= p^2 q^{2k} + 2p^2 q^k \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} = 2pq^k - pq^{2k} - pq^{2k+1}.$$

Deci

$$P(\eta = k) = 2pq^k - pq^{2k} - pq^{2k+1}, \; k = 1, 2, \ldots$$

b) Ca să aflăm repartiția vectorului aleator (η, ξ_1) va trebui să evaluăm

$$P(\eta = i, \xi_1 = j); \; i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Vom distinge trei cazuri: $i < j$, $i = j$ și $i > j$. Dacă $i < j$ atunci evenimentul $(\eta = i, \xi_1 = j)$ este evenimentul imposibil și deci $P(\eta = i, \xi_1 = j) = 0$.

Dacă $i = j$ atunci

$$P(\eta = i, \xi_1 = i) = \sum_{j=0}^{i} P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) =$$

$$\sum_{j=0}^{i} P(\xi_1 = i) P(\xi_2 = j) = P(\xi_1 = i) \sum_{j=0}^{i} P(\xi_2 = j),$$

întrucît variabilele ξ_1, ξ_2 sînt independente

$$P(\eta = i, \xi_1 = i) = p^2 q^i \sum_{j=0}^{i} q^j = p^2 q^i \frac{1 - q^{i+1}}{1 - q} = pq^i (1 - q^{i+1})$$

Dacă $i > j$ atunci

$$P(\eta = i, \xi_1 = j) = P(\max(\xi_1, \xi_2) = i, \xi_1 = j) =$$

$$P(\xi_1 = j, \xi_2 = i) = P(\xi_1 = j) P(\xi_2 = i) = p^2 q^{i+j}.$$

Prin urmare

$$P(\eta = i,\ \xi_1 = j) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i < j, \\ pq^i(1 - q^{i+1}) & \text{dacă } i = j, \\ p^2 q^{i+j} & \text{dacă } i > j. \end{cases}$$

37. *Fie ξ_1 și ξ_2 două variabile aleatoare independente cu repartiția* $P(\xi_i = k) = pq^k$, $i = 1, 2,$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Să se arate că

$$P(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{1}{n+1},\quad k = 1, 2, \ldots, n$$

SOLUȚIE. Plecînd de la definiția probabilității condiționate avem

$$P(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{P(\xi_1 = k,\ \xi_1 + \xi_2 = n)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{P(\xi_1 = k,\ \xi_2 = n - k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)}.$$

Cum variabilele aleatoare ξ_1 și ξ_2 sînt independente, atunci

$$P(\xi_1 = k,\ \xi_2 = n - k) = P(\xi_1 = k)\,P(\xi_2 = n - k) = q^n.$$

Mai departe

$$P(\xi_1 + \xi_2 = n) = \sum_{j=0}^{n} P(\xi_1 = j,\ \xi_2 = n - j) = \sum_{j=0}^{n} P(\xi_1 = j)P(\xi_2 = n - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} pq^j pq^{n-j} = (n+1)\,p^2 q^n.$$

Așadar

$$P(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{1}{n+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

38. *Să se arate că dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sînt variabile aleatoare independente și dacă ξ_i urmează o lege χ^2 cu n_i grade de libertate, $1 \leqslant i \leqslant m$, atunci variabila*

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m$$

urmează o lege χ^2 cu $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ grade de libertate.

SOLUȚIE. Este suficient să stabilim proprietatea de mai înainte pentru $m = 2$.

În acest caz

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}}{4\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{x_1}{2}\right)^{\frac{n_1}{2} - 1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2} - 1}, \\ \qquad\qquad \text{dacă} \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0, \\ 0 \qquad \text{dacă} \quad \min\{x_1, x_2\} \leqslant 0. \end{cases}$$

Să considerăm acum transformarea

$$u_1 = x_1 + x_2,$$

$$u_2 = x_2,$$

sau

$$x_1 = u_1 - u_2,$$

$$x_2 = u_2.$$

Se observă că iacobianul acestei transformări este 1. Fie

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2,$$

$$\eta_2 = \xi_2.$$

Atunci

$$f_{\eta_1,\eta_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{u_1}{2}}}{4\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\dfrac{u_1 - u_2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(\dfrac{u_2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1}, \\ \quad \text{dacă } 0 < u_2 < u_1,\ 0 < u_1 < \infty, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Pentru $u_1 > 0$, avem

$$f_{\eta_1}(u_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta_1,\eta_2}(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_2 =$$

$$= \frac{e^{-\frac{u_1}{2}}}{4\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^{u_1} \left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(\frac{u_2}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1} \mathrm{d}u_2.$$

Să punem $x = \dfrac{u_2}{u_1}$; atunci pentru $u_1 > 0$, avem

$$f_{\eta_1}(u_1) = \frac{e^{-\frac{u_1}{2}}}{2\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{u_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1} B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right),$$

unde

$$B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) = \int_0^1 x^{\frac{n_1}{2}-1} (1-x)^{\frac{n_2}{2}-1}\,\mathrm{d}x.$$

În sfîrșit, obținem

$$f_{\eta_1}(u_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)} e^{-\frac{u_1}{2}} \left(\dfrac{u_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)-1} & \text{dacă } u_1 > 0, \\ 0 & \text{dacă } u_1 \leqslant 0, \end{cases}$$

care este densitatea de repartiție a variabilei $\xi_1 + \xi_2$ și se vede că este o repartiție $\varkappa^2$ cu $n_1 + n_2$ grade de libertate.

39. *Repartiția vectorului aleator* (ξ, η) *este dată de*

$$dF = \frac{k\,(1+x+y)}{(1+x)^4\,(1+y)^4}\,dx dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant y \leqslant \infty.$$

Se cere:
a) *Să se determine constanta* k.
b) *Să se arate că repartiția marginală a lui* ξ *este:*

$$dF = \frac{3\,(2x+3)}{4\,(1+x)^4}\,dx, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty.$$

SOLUȚIE. a) Din proprietățile funcției de repartiție, avem

$$\int dF = 1,$$

sau în condițiile problemei

$$k \int\int \frac{1+x+y}{(1+x)^4\,(1+y)^4}\,dx dy = 1.$$

De unde

$$k = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^4}\,dy \int_0^\infty \frac{1+x+y}{(1+x)^4}\,dx} = \frac{1}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{3}\right)\frac{dy}{(1+y)^4}} = \frac{1}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{2}$$

b) Pentru a calcula repartiția marginală a lui x, vom integra de la 0 la ∞ în raport cu y funcția $F(x, y)$

$$F(x) = \int_0^\infty F(x, y)\,dy = \frac{9}{2\,(1+x)^4} \int_0^\infty \frac{1+x+y}{(1+y)^4}\,dy = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x+3}{(1+x)^4}.$$

Rezultă că

$$dF(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x+3}{(1+x)^4}\,dx.$$

40. *Fie* ξ *și* η *variabile aleatoare independente având repartițiile* $\Gamma(\nu_1)$ *și respectiv* $\Gamma(\nu_2)$. *Să se arate că variabila*

$$\mu = \frac{\xi}{\xi + \eta}$$

are repartiția $B(\nu_1, \nu_2)$.

SOLUȚIE. Probabilitatea elementară a lui ξ și η este

$$\frac{1}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)}\,\xi^{\nu_1-1}\cdot\eta^{\nu_2-1}\,e^{-\xi-\eta}\,d\xi d\eta.$$

Făcînd transformarea

$$u = \frac{\xi}{\xi + \eta}$$

$$v = \eta$$

obținem probabilitatea elementară pentru u și v

$$\frac{1}{\Gamma(\nu_1)\,\Gamma(\nu_2)}\,u^{\nu_1-1}\,v^{\nu_1+\nu_2-1}\,(1-u)^{-(\nu_1+1)}\,e^{-\frac{v}{1-u}}\,du dv. \tag{1}$$

Repartiția variabilei u este repartiție marginală a variabilei u în repartiția vectorului aleator (u, v) cu probabilitatea elementară (1). Integrînd relația (1) în raport cu v de la 0 la ∞ obținem rezultatul că u este o variabilă distribuită $B(\nu_1, \nu_2)$.

41. *Funcția de repartiție bidimensională a lui* (ξ_1, ξ_2) *este*

$$dF = \frac{ky}{(1+x)^4}\,\exp\left(-\frac{y}{1+x}\right)dx\,dy,\quad 0 \leqslant x \leqslant \infty,\quad 0 \leqslant y \leqslant \infty.$$

Se cere:

a) *Să se arate că prin transformarea* $u = \frac{y}{1+x}$, $v = \frac{1}{1+x}$ *repartiția vectorului* (η_1, η_2) *unde* $\eta_1 = \frac{\xi_2}{1+\xi_1}$, $\eta_2 = \frac{1}{1+\xi_1}$ *este*

$$dF = kue^{-u}\,du dv,\quad 0 \leqslant u \leqslant \infty,\quad 0 \leqslant v \leqslant \infty$$

b) *Să se determine constanta* k.

SOLUȚIE a) Din

$$u = \frac{y}{1+x},\qquad v = \frac{1}{1+x}$$

deducem

$$x = \frac{1}{v} - 1 \quad \text{și} \quad y = \frac{u}{v}.$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3}$$

și avem relația

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

atunci

$$\mathrm{d}F = \frac{k\frac{u}{v}}{\left(1+\frac{1}{v}-1\right)^4} e^{-u}\frac{1}{v^3}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

sau

$$\mathrm{d}F = kue^{-u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Din

$$u = \frac{y}{1+x},\ \text{cînd}\ \left\{\begin{array}{l} y=0;\ u=0 \\ y=\infty;\ u=\infty \end{array}\right\} \text{rezultă} \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant u \leqslant \infty \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \end{array}\right.$$

$$v = \frac{1}{1+x},\ \text{cînd}\ \left\{\begin{array}{l} x=0\ ;\ v=1 \\ x=\infty;\ v=0 \end{array}\right\}$$

b) Din proprietățile densității de repartiție

$$1 = k \iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant\infty \\ 0\leqslant v\leqslant 1}} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

avem

$$k = 1.$$

42. *Fie*

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} 3x & \text{dacă } 0 < y < x,\ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{array}\right.$$

o densitate de repartiție bidimensională. Se cere să se calculeze densitatea de repartiție corespunzătoare variabilei

$$\beta = \xi - \eta.$$

SOLUȚIE. Să considerăm transformarea

$$z = x - y,$$
$$w = y,$$

de unde obținem

$$x = z + w,$$
$$y = w.$$

Se observă că iacobianul acestei transformări este egal cu 1.

Din inegalitățile

$$0 < y < x, \quad 0 < x < 1$$

rezultă că

$$0 < w < w + z, \quad 0 < z + w < 1.$$

Aceste ultime două inegalități sînt satisfăcute dacă

$$0 < w < 1 - z.$$

Atunci avem

$$f_\eta(z) = \int_0^{1-z} f_{\beta,\gamma}(z, w)\,dw = \int_0^{1-z} 3(z + w)dw =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3(1 - z^2)}{2}, & \text{dacă } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

unde am notat $\gamma = w$.

43. *Fie*

$$f_{\xi,\eta,\gamma}(x, y, z) = \begin{cases} e^{-(x+y+z)} & \text{dacă } x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

o densitate de repartiție. Să se calculeze densitatea de repartiție corespunzătoare variabilei

$$\beta = \frac{\xi + \eta + \gamma}{3}$$

SOLUȚIE. Să considerăm transformarea

$$u = \frac{x + y + z}{3}, \quad v = y, \quad w = z$$

de unde

$$x = 3u - v - w, \quad y = v, \quad z = w.$$

Să calculăm iacobianul

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Deci

$$f_{u,v,w}(u, v, w) = \begin{cases} 3e^{-3u} \text{ dacă } 3u - v - w > 0, \quad v > 0, \quad w > 0, \\ 0 \quad \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Să observăm că inegalitățile

$$w > 0, \quad 3u - v - w > 0,$$

implică

$$0 < w < 3u - v,$$

$$f_{u,v}(u, v) = \begin{cases} \int_0^{3u-v} 3e^{-3u}, \text{ dacă } 3u - v > 0, \ v > 0 \\ 0 \quad \text{în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

iar

$$f_u(u) = \begin{cases} \int_0^{3u} dv \int_0^{3u-v} 3e^{-3u}\, dw = \frac{27}{2} u^2 e^{-3u}, \text{ dacă } u > 0 \\ 0 \quad \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

44. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare, a căror repartiție comună este dată de densitatea*

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} \text{ dacă } 0 \leqslant x, y \leqslant \infty, \\ 0 \quad \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se afle densitatea de repartiție a variabilelor

$$\nu = \xi + \eta \text{ și } \theta = \frac{\xi}{\eta}.$$

SOLUȚIE. Punînd

$$u = x + y, \quad v = \frac{x}{y}$$

găsim

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x + y}{y^2} = -\frac{(1 + v)^2}{u}.$$

Probabilitatea elementară pentru punctul u, v este

$$g(u, v)dudv = e^{-u} \frac{u}{(1 + v)^2} dudv, \quad 0 \leqslant u, \quad v < \infty. \tag{1}$$

Densitatea de repartiție a variabilei ν, $r(u)$, se obține integrînd relația (1) de la 0 la ∞ în raport cu v. Obținem

$$r(u) = u\, u^{-u} \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1 + v)^2} = ue^{-u}, \quad 0 \leqslant u < \infty$$

și, analog, densitatea de repartiție a variabilei θ, $s(v)$

$$s(v) = \frac{1}{(1+v)^2}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{(1+v)^2}, \quad 0 \leqslant v < \infty.$$

45. *Dacă variabilele ξ_k sînt independente și urmează o repartiție Cauchy a căror densitate este*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \tag{1}$$

să se arate că densitatea de repartiție a variabilei $\beta_n = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$ *este dată tot de* (1).

SOLUȚIE. Fie

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

și

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(u)\, f_1(x-u)\,du.$$

Prin inducție arătăm că

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Se observă că dacă $n = 1$, egalitatea de mai înainte este adevărată; să presupunem verificată pentru n și să arătăm că este adevărată pentru $n+1$. Va trebui să arătăm că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\,du}{\pi^2(n^2+u^2)\,[1+(u-x)^2]} = \frac{n+1}{\pi\,[(n+1)^2+x^2]}.$$

Integrala de mai înainte este de forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ab\,du}{\pi^2(a^2+u^2)\,[b^2+(u-x)^2]} = \frac{a+b}{[(a+b)^2+x^2]\,\pi},$$

pe care o vom calcula prin reziduuri: fie

$$f(z) = \frac{ab}{\pi^2\,(a+z^2)\,[b^2+(z-x)^2]},$$

atunci cum

$$|f(z)| \leqslant \frac{k}{R^4}, \quad \text{dacă } |z| = R,$$

unde k este o constantă pozitivă, iar R suficient de mare, avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Însă

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{ab}{\pi^2} \cdot \left[\frac{1}{2ia\ [b^2 + (x - ia)^2]} + \frac{1}{2ib\ [a^2 + (x + ib)^2]}\right]$$

sau

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \frac{a+b}{\pi\ [(a+b)^2 + x^2]}.$$

Rezultă deci că

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

pentru orice n.

Deoarece densitatea de repartiție a variabilei

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

este

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi\,(n^2 + x^2)},$$

rezultă că densitatea de repartiție corespunzătoare variabilei

$$\beta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

este

$$nf_n(nx) = f_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

46. *Variabilele aleatoare ξ și η sînt independente și au aceeași densitate de repartiție dată de*

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{c}{1 + x^4}.$$

Să se afle constanta c și să se demonstreze că variabila ξ/η se repartizează după legea lui Cauchy.

SOLUȚIE. Din proprietățile densității de repartiție, avem

$$f_\xi(x) \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \int_R f_\xi(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Urmează că

$$c \geqslant 0 \quad \text{și} \quad c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4} = 1.$$

Calculul integralei se face prin reziduuri considerînd funcția

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

și calculînd integrala pe conturul (Γ).

Pentru integrala pe conturul (c_r) fig. 13 deducem

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{1+r^4e^{4i\theta}} \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{rd\theta}{|1+r^4e^{4i\theta}|}.$$

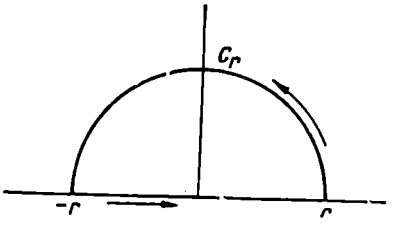


Fig. 13.

Cum

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{|1+r^4e^{4i\theta}|} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\sqrt{1+2r^4\cos 4\theta + r^8}} = 0$$

rezultă că

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{dz}{1+z^4} = 0,$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad c = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Avem

$$f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^4}.$$

Deoarece ξ și η sînt variabile independente; avem

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(y) f_{\eta}(xy) |y| dy = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+x^2y^2} |y| dy =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{y\,dy}{(1+y^4)(1+x^4y^4)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d(y^2)}{(1+y^4)(1+x^4y^4)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+x^4y^2)}.$$

Descompunînd integrantul în elemente simple, iar apoi integrînd se obține:

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^4}; \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

adică ξ/η urmează o lege Cauchy.

47. *Se știe că raportul a două variabile aleatoare independente, fiecare urmînd aceeași repartiție normală cu media zero, urmează o lege Cauchy.*

Să se arate că dacă ξ *și* η *sînt două variabile aleatoare independente fiecare avînd aceeași funcție de repartiție și* $M(\xi) = M(\eta) = 0$ *și dacă* $\frac{\xi}{\eta}$ *are o repartiție Cauchy atunci* ξ *și* η *nu sînt neapărat repartizate normal.*

SOLUȚIE. Fie ξ și η două variabile aleatoare cu densitatea de repartiție

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^4}\ ;\ -\infty < x < \infty.$$

Atunci densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $\frac{\xi}{\eta}$ este:

$$g(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|\,dy}{(1+y^4)(1+x^4y^4)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

De aici se vede că repartiția raportului $\frac{\xi}{\eta}$ este o repartiție Cauchy deși repartițiile variabilelor ξ și η nu sînt normale.

48. *Sistemul de variabile* (ξ, η) *urmează o lege dată de densitatea de repartiție* $f(x, y)$.

Se cere să se determine densitatea de repartiție a variabilei $\xi = \xi\cdot\eta$.

SOLUȚIE. Fie $z > 0$ arbitrar. În planul xOy reprezentăm grafic funcția $z = xy$ (fig. 14). Aceasta este o hiperbolă, ale cărei asimptote sînt axele de coordonate.

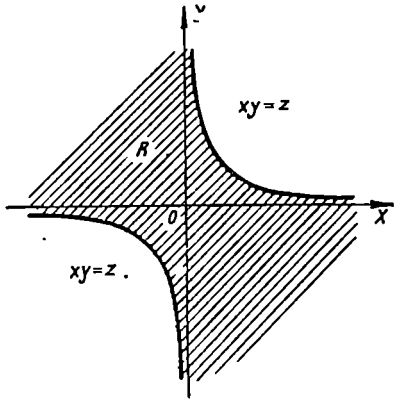


Fig. 14.

Fie $G(z)$ funcția de repartiție a variabilei z. Avem

$$G(z) = \iint_{(R)} f(x, y)\,dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{\frac{z}{x}}^{\infty} f(x, y)\,dx dy +$$

$$+ \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Diferențiind în raport cu z, obținem densitatea de repartiție a variabilei z

$$g(z) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx.$$

Pentru $z < 0$, avem

$$G(z) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y)\,dx\,dy + \int_{0}^{\infty}\int_{\frac{z}{x}}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy$$

și

$$g(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx - \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx.$$

49. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare, a căror densitate de repartiție bidimensională este dată de*

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{dacă } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Se cere să se determine densitatea de repartiție corespunzătoare variabilelor ξ^2 *și* η^2.

SOLUȚIE. Să notăm

$$u = x^2,$$
$$v = y^2.$$

Iacobianul acestei transformări este

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u \cdot v}}.$$

Știm însă că

$$f_{u,v}(u, v) = f_{\xi,\eta}(x, y) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|,$$

deci

$$f_{u,v}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 < u < 1, \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

50. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare normală* (m, σ). *Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei* $\eta = a\xi + b$, *unde* a *și* b *sînt constante.*

SOLUȚIE. Folosind formula

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$$

și știind că

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

$$y = \varphi(x) = ax + b,$$

rezultă

$$x = \psi(y) = \frac{y - b}{a}$$

$$|\psi'(y)| = \frac{1}{|a|}.$$

Avem

$$g(y) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[y-(am+b)]^2}{2|a|^2\sigma^2}}$$

care de asemenea este densitatea unei legi normale de parametri $(am + b, |a|\sigma)$.

51. *Variabila aleatoare ξ urmează o lege Cauchy, a cărei densitate de repartiție este*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei $\eta = 1 - \xi^3$.

SOLUȚIE. Deoarece funcția $y = 1 - x^3$ este monotonă în intervalul $-\infty, +\infty)$ putem aplica formula

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\psi'(y)|$$

unde: $g(y)$ este densitatea de repartiție a variabilei η.

În acest caz

$$y = \varphi(x) = 1 - x^3, \quad x = \psi(y) = \sqrt[3]{1-y}$$

și

$$\psi'(y) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}, \qquad |\psi'(y)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}},$$

de unde

$$g(y) = \frac{1}{3\pi\left(1 + \sqrt[3]{(1-y)^2}\right)\sqrt[3]{(1-y)^2}}.$$

52. *Fie ξ și η două variabile aleatoare independente avînd aceeași densitate de repartiție.*

$$P(\xi = k) = P(\eta = k) = C_n^k p^k q^{n-k}; \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei $\beta = \xi + \eta$.

SOLUȚIE. Densitatea de repartiție a variabilei β este

$$f(j) = \sum_k g(j-k) \cdot h(k),$$

unde g și h sînt densitățile respectiv ale lui ξ și η.

În cazul nostru

$$f(j) = P(\beta = j) = \sum_k C_n^{j-k} p^{j-k} q^{n-j+k} C_n^k p^k q^{n-k} = p^j q^{2n-j} \sum_k C_n^{j-k} C_n^k.$$

Cum

$$0 \leqslant k \leqslant n; \quad 0 \leqslant j - k \leqslant n, \quad -n < k - j \leqslant 0,$$

urmează că

$$j - n \leqslant k \leqslant j,$$

de unde

$$f(j) = p^j q^{2n-j} \sum_{k=j-n}^{j} C_n^{j-k} C_n^k.$$

Avem

$$\sum_{k=j-n}^{j} C_n^{j-k} C_n^k = C_{2n}^j,$$

și deci

$$f(j) = C_{2n}^j p^j q^{2n-j}.$$

53. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare independente, astfel încît*

$$\begin{matrix} P(\xi = i) = f(i) \\ P(\eta = i) = g(i) \end{matrix}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

unde $f(i) > 0$, $g(i) > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) = 1$ *și*

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = t) = \begin{cases} C_t^k p_t^k (1 - p_t)^{t-k} & \text{pentru } 0 \leqslant k \leqslant t, \\ 0 & \text{pentru } k > t. \end{cases}$$

În aceste condiții să se arate că $p_t \equiv p$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, *și*

$$f(i) = e^{-\theta\alpha} \cdot \frac{(\theta\alpha)^i}{i\,!},$$

$$g(i) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^i}{i\,!},$$

unde $\alpha = \frac{p}{(1-p)}$ *și* $\theta > 0$ *este arbitrar.*

SOLUȚIE. Pentru $t \geqslant 0$ și $0 \leqslant k \leqslant t$, avem

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = t) = C_t^k p_t^k (1 - p_t)^{t-k}.$$

Deoarece variabilele ξ și η sînt independente

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = t) = \frac{P(\xi = k)\, P(\eta = t - k)}{P(\xi + \eta = t)} = \frac{f(k) \cdot g(t-k)}{\sum_{i=0}^{t} f(i) \cdot g(t-i)},$$

și cum $0 \leqslant k \leqslant t$, urmează că

$$\frac{f(k) \cdot g(t-k)}{\sum_{i=0}^{t} f(i) \cdot g(t-i)} = C_t^k p_t^k (1 - p_t)^{t-k}. \tag{1}$$

Cum formula (1) este adevărată pentru k, $0 \leqslant k \leqslant t$, va fi adevărată și pentru $k-1$:

$$\frac{f(k-1)\cdot g(t-k+1)}{\sum_{i=0}^{t} f(i)\cdot g(t-i)} = C_t^{k-1}\cdot p_t^{k-1}\cdot(1-p_t)^{t-k+1}. \tag{1'}$$

Împărțind (1) la (1') obținem

$$\frac{f(k)\cdot g(t-k)}{f(k-1)\cdot g(t-k+1)} = \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)\cdot\frac{(t-k+1)}{k}. \tag{2}$$

Dînd în (2) lui k valorile $1, 2, \ldots, k$; $0 \leqslant k \leqslant t$, $t \geqslant 0$, obținem

$$\frac{f(k)\cdot g(t-k)}{f(k-1)\cdot g(t-k+1)} = \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)\cdot\frac{(t-k+1)}{k},$$

$$\frac{f(k-1)\,g(t-k+1)}{f(k-2)\,g(t-k+2)} = \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)\cdot\frac{(t-k+2)}{k-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f(1)\cdot g(t-1)}{f(0)\cdot g(t)} = \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)\cdot\frac{t}{1}.$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități, rezultă

$$f(k)\cdot g(t-k) = \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)^k\cdot\frac{t(t-1)\ldots(t-k+2)(t-k+1)}{k!}f(0)\cdot g(t) =$$

$$= \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)^k\cdot\frac{t!}{k!(t-k)!}f(0)\cdot g(t),$$

sau

$$f(k)\cdot g(t-k) = \left(\frac{p_t}{1-p_t}\right)^k\cdot C_t^k\cdot f(0)\cdot g(t). \tag{3}$$

Ecuațiile (1) și (3) sînt echivalente. Fie $\alpha_t = p_t/(1-p_t)$, $t \geqslant 1$. Pentru $t \geqslant 1$, luînd $k = t$, ecuația (2) devine

$$f(t) = \alpha_t\left(\frac{g(1)}{g(0)}\right)\cdot\frac{1}{t}\cdot f(t-1). \tag{4}$$

Fie $\theta = \frac{g(1)}{g(0)}$. Dînd lui t valorile $1, 2, \ldots, t-1, t$, obținem

$$f(1) = \alpha_1\cdot\theta\cdot f(0),$$

$$f(2) = \alpha_2\cdot\theta\cdot\frac{1}{2}f(1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(t-1) = \alpha_{t-1}\cdot\theta\cdot\frac{1}{t-1}f(t-2),$$

$$f(t) = \alpha_t\cdot\theta\cdot\frac{1}{t}\cdot f(t-1),$$

de unde

$$f(t) = \prod_{i=1}^{t} \alpha_i \theta^t \cdot \frac{f(0)}{t!} . \tag{5}$$

Pentru $t \geqslant 1$, luînd $k = 1$, ecuația (2) devine

$$g(t) = \frac{1}{t \cdot \alpha_t} \left(\frac{f(1)}{f(0)} \right) \cdot g(t-1),$$

de unde, dînd lui t valorile $1, 2, \ldots, t-1, t$

$$g(t) = \frac{(\theta \alpha_1)^t \cdot g(0)}{t! \prod_{i=1}^{t} \alpha_i} . \tag{6}$$

Pe de altă parte, din (3) pentru $k+1 \leqslant t$, obținem

$$f(k+1) \cdot g(t-k-1) = \left(\frac{p_t}{1-p_t} \right)^{k+1} C_t^{k+1} g(t) f(0). \tag{6'}$$

Împărțind (3) la (6') obținem

$$\frac{g(t-k)}{g(t-k-1)} = \frac{1}{\alpha_t} \cdot \frac{(k+1)}{(t-k)} \cdot \frac{f(k+1)}{f(k)} \tag{6''}$$

sau

$$g(t-k) = \frac{1}{\alpha_t} \cdot \frac{(k+1)}{(t-k)} \cdot \frac{f(k+1)}{f(k)} g(t-k-1). \tag{6'''}$$

Din (4) obținem

$$f(k+1) = \alpha_{(k+1)} \cdot \theta \cdot \frac{1}{(k+1)} f(k)$$

și

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} = \alpha_{(k+1)} \cdot \theta \cdot \frac{1}{(k+1)} ,$$

Ținînd seama în (6''') de relația de mai înainte obținem

$$g(t-k) = \frac{\alpha_{(k+1)}}{\alpha_{(t)}} \cdot \frac{\theta}{t-k} \cdot g(t-k-1) \tag{7}$$

sau

$$g(t-k) = g(t+1-(k+1)) = \frac{\alpha_{(k+2)}}{\alpha_{(t+1)}} \cdot \frac{\theta}{t-k} g(t-k-1). \tag{8}$$

Comparînd (7) cu (8) rezultă

$$\frac{\alpha_{(k+1)}}{\alpha_{(t)}} = \frac{\alpha_{(k+2)}}{\alpha_{(t+1)}} \; ; \; k \geqslant 0, \; t \geqslant (k+1).$$

Pentru $k = 0$, obținem

$$\alpha_{(t+1)} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\alpha_t, \quad t \geqslant 1,$$

de unde dînd lui t valorile $1, 2, \ldots, t$, rezultă

$$\alpha_{(t)} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{t-1} \cdot \alpha_1, \quad t \geqslant 1. \tag{9}$$

Substituind (9) în (5) și în (6), pentru $t \geqslant 1$, avem

$$f(t) = \frac{(\theta\alpha_1)^t}{t!} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{t(t-1)/2} \cdot f(0). \tag{10}$$

și

$$g(t) = \frac{\theta^t}{t!}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{t(t-1)/2} \cdot g(0). \tag{11}$$

Dacă $f(t)$ este dată de (10), $\sum_{t=0}^{\infty} f(t)$ este convergentă numai dacă $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leqslant 1$ și dacă $g(t)$ este dată de (11), $\sum_{t=0}^{\infty} g(t)$ este convergentă numai dacă $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leqslant 1$. Prin urmare $\alpha_1 = \alpha_2$.

Din (9), rezultă $\alpha_t \equiv \alpha$, $t \geqslant 1$ și

$$f(t) = \frac{(\theta\alpha)^t}{t!} \cdot f(0), \quad g(t) = \frac{\theta^t}{t!} \cdot g(0).$$

Din

$$\sum_{t=0}^{\infty} f(t) = \sum_{t=0}^{\infty} g(t) = 1,$$

rezultă

$$1 = f(0) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\theta\alpha)^t}{t!} = f(0) \cdot e^{\theta\alpha}$$

$$1 = g(0) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\theta^t}{t!} = g(0) \cdot e^{\theta},$$

de unde

$$f(0) = e^{-\theta\alpha} \text{ și } g(0) = e^{-\theta},$$

și deci

$$f(t) = \frac{(\theta\alpha)^t}{t!} \cdot e^{-\theta\alpha} \text{ și } g(t) = \frac{\theta^t}{t!} e^{-\theta}.$$

54. *Fie* ξ_1 *și* ξ_2 *două variabile aleatoare independente cu repartiția Cauchy:* $f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ *și* $f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $-\infty < x, y < \infty$. *Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei* $\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$.

SOLUȚIE. Fie $h(u)$ densitatea de repartiție a variabilei $\xi_1 + \xi_2$. Avem

$$h(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u-y) f_2(y)\, dy,$$

și ținînd seama că f_1 și f_2 sînt densități de repartiție ale unor legi Cauchy, rezultă

$$h(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(u-y)^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}\, dy.$$

Descompunînd integrantul în elemente simple, obținem

$$\frac{1}{u^2(u^2+4)}\left[\frac{u^2}{1+y^2} + \frac{2uy}{1+y^2} + \frac{u^2}{1+(y-u)^2} - \frac{2u(y-u)}{1+(y-u)^2}\right].$$

Termenii din paranteza pătrată integrați, dau

$$u \ln(1+y^2),\ -u \ln[1+(y-u)^2],\ u^2 \operatorname{tg}^{-1} y,\ u^2 \operatorname{tg}^{-1}(y-u);$$

în final pentru $v = \frac{u}{2}$,

$$h(v) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+v^2}.$$

55. *Densitatea de repartiție a variabilelor independente* ξ *și* η *este egală, respectiv cu:*

a) $f_\xi(x) = f_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0, \\ ae^{-ax} & \text{pentru } x > 0, \quad (a > 0); \end{cases}$

b) $f_\xi(x) = f_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0,\ x > a, \\ \frac{1}{a} & \text{pentru } 0 < x \leqslant a. \end{cases}$

Să se afle densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $\beta = \frac{\xi}{\eta}$.

SOLUȚIE. a) Densitatea de repartiție a variabilei β este

$$f_1(z) = \int_0^\infty |x|\, ae^{-ax} ae^{-axz}\, dx = a^2 \int_0^\infty xe^{-ax(1+z)}\, dx.$$

Integrînd prin părți, obținem

$$f_1(z) = \frac{a}{1+z}\int_0^\infty e^{-ax(1+z)}\,dx = \frac{1}{(1+z)^2}.$$

Deci

$$f_1(z) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{(1+z)^2} & \text{pentru } 0 < z < \infty. \end{cases}$$

b) Aplicînd din nou formula care ne dă densitatea de repartiție a raportului a două variabile aleatoare independente

$$f_2(z) = \int_0^a |x| f_\xi(x) \cdot f_\eta(xz)\,dx,$$

avem

$$f_2(z) = \frac{1}{a}\int_0^a x f_\eta(xz)\,dx = \frac{1}{az^2}\int_0^{az} u f_\eta(u)\,du.$$

Urmează că

$$f_2(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{pentru } 0 < z \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2z^2} & \text{pentru } z > 1. \end{cases}$$

56. *Să presupunem că variabila aleatoare* ξ *urmează o lege normală de parametri* 0 *și* 1. *Să se determine densitatea de probabilitate corespunzătoare variabilelor aleatoare*:

a) $\eta = |\xi|^{\frac{1}{2}}$,

b) $\eta = |\xi|^{\frac{1}{3}}$.

SOLUȚIE. Densitatea de repartiție a variabilei ξ este

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a) Cum ξ urmează o lege normală, urmează că

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = 2F_\xi(y^2),$$

de unde rezultă

$$f_\eta(y) = \frac{4y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^4}{2}}, \text{ dacă } y > 0.$$

b) Analog

$$F_\eta(y) = 2F_\xi(y^3)$$

de unde

$$f_\eta(y) = \frac{6y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^6}{2}}, \text{ dacă } y > 0.$$

57. *Fie ξ o variabilă aleatoare care urmează o lege de repartiție uniformă în intervalul* $[0, 1]$.

Să se determine densitatea de probabilitate corespunzătoare variabilelor aleatoare:

a) e^ξ,

b) $2\xi + 1$,

c) $2\xi^2 + 1$.

SOLUȚIE. a) Densitatea de repartiție a variabilei ξ este:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0, 1], \end{cases}$$

iar funcția de repartiție este dată de

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ x & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{dacă } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Atunci, fie

$$\eta = e^\xi.$$

Avem

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(e^\xi < y) = P(\xi < \ln y) = F_\xi(\ln y).$$

Rezultă deci că

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{dacă } 1 < y < e, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

b) Avem, notînd $\eta = 2\xi + 1$,

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2\xi + 1 < y) = P\left(\xi < \frac{y-1}{2}\right) = F_\xi\left(\frac{y-1}{2}\right),$$

de unde rezultă

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } 1 < y < 3, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

c) Punînd $\eta = 2\xi^2 + 1$, avem

$$F_\eta(y) = P(2\xi^2 + 1 < y) = P\left(\xi < \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = F_\xi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right),$$

de unde

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{dacă } 1 < y < 3, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

58. *Fie F_1 și F_2 funcțiile de repartiție corespunzătoare variabilelor aleatoare ξ_1 și ξ_2 cu media zero și dispersia mai mică decît β. Să se arate că*

$$F_1(x) - F_2(x + 2\alpha) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}$$

pentru orice x și orice $\alpha > 0$.

SOLUȚIE. Dacă

$$x \leqslant -\alpha$$

atunci din definiția funcției de repartiție și din inegalitatea lui Cebîșev rezultă că

$$F_1(x) \leqslant F_1(-\alpha) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}$$

și de aici rezultă

$$F_1(x) - F_2(x + 2\alpha) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Dacă

$$x > -\alpha.$$

Avem

$$F_2(x + 2\alpha) \geqslant F_2(\alpha) \geqslant 1 - \frac{\beta}{\alpha^2},$$

și deci

$$F_1(x) - F_2(x + 2\alpha) \leqslant 1 - F_2(x + 2\alpha) \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

59. *Fie*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

densitatea de repartiție a legii normale cu două dimensiuni.

Se cere să se calculeze probabilitatea ca punctul aleator (ξ, η) să cadă în dreptunghiul

$$(D) \begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ \gamma \leqslant y \leqslant \delta. \end{cases}$$

SOLUȚIE. Avem

$$P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}dx\int_\gamma^\delta e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma^2}}dy.$$

Punînd

$$\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\,\sigma_x} = u \text{ și } \frac{y-m_y}{\sqrt{2}\,\sigma_y} = v.$$

obținem

$$P\{(\xi, \eta) \in D\} = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sqrt{2}\,\sigma_x}\right)\right] \times \left[\Phi\left(\frac{\delta-m_y}{\sqrt{2}\,\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma-m_y}{\sqrt{2}\,\sigma_y}\right)\right]$$

unde

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}dt.$$

60. *Fie*

$$f(x,y) = \frac{\rho^2}{\pi E_\xi E_\eta}e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_\xi^2}+\frac{y^2}{E_\eta^2}\right)}$$

densitatea de repartiție a legii normale cu două dimensiuni.

Se cere: să se calculeze probabilitatea ca punctul aleator (ξ, η) *să cadă în elipsa* A_k, *a cărei ecuație este*

$$\frac{x^2}{E_\xi^2}+\frac{y^2}{E_\eta^2} = k^2,$$

unde parametrul k reprezintă raportul semiaxelor elipsei de împrăștiere.

SOLUȚIE. Avem

$$P((\xi, \eta) \in A_k) = \iint_{(A_k)} f(x,y)\,dxdy = \iint_{(A_k)} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)}dxdy.$$

Punînd

$$\frac{\rho x}{E_x} = u; \qquad \frac{\rho y}{E_y} = v,$$

elipsa (A_k) se transformă în cercul C_k de rază $k\rho$, iar

$$P((\xi, \eta) \in A_k) = \frac{1}{\pi}\iint_{(C_k)} e^{-u^2-v^2}du\,dv.$$

Făcînd schimbarea

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta,$$

se obține

$$P((\xi, \eta) \in A_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{k\rho} r \cdot e^{-r^2}\,dr d\theta = 2\int_0^{k\rho} re^{-r^2}\,dr,$$

sau

$$P((\xi, \eta) \in A_k) = 1 - e^{-(k\rho)^2}$$

61. *Fie*

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2}\right)}$$

densitatea de repartiție a legii normale cu trei dimensiuni.

Se cere să se calculeze probabilitatea ca punctul aleator (ξ, η, β) *să cadă în elipsoidul*

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2} = k^2,$$

unde k *satisface egalitățile* $a = kE_x$, $b = kE_y$, $c = kE_z$.

SOLUȚIE. Avem

$$P((\xi, \eta, \beta) \in A_k) = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z}\iiint_{(A_k)} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} + \frac{z^2}{E_z^2}\right)}\,dx dy dz.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\frac{\rho x}{E_x} = r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\rho y}{E_y} = r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\rho z}{E_z} = r\sin\varphi,$$

determinantul funcțional va fi

$$\frac{r^2\cos\theta\, E_x E_y E_z}{\rho^3}$$

și

$$P((\xi, \eta, \beta) \in A_k) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^{k\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, e^{-r^2}\,dr d\theta d\varphi = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{k\rho} r^2 e^{-r^2}\,dr.$$

Integrînd prin părți, obținem

$$P((\xi, \eta, \beta) \in A_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{-k\rho\, e^{-(k\rho)^2} + \int_0^{k\rho} e^{-r^2}\,dr\right\} = \Phi(kr) - \frac{2k\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-(k\rho)^2},$$

unde Φ este funcția lui Laplace.

62. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare independente urmînd fiecare o lege normală de parametri* 0 *și* 1. *Să se determine raza cercului cu centrul în origine astfel încît*

$$P((\xi, \eta) \in C_{(0,R)}) = 0{,}95\ ^{1}).$$

SOLUȚIE. Densitatea de repartiție a vectorului aleator (ξ, η) este

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty),$$

iar

$$P((\xi, \eta) \in C_{(0,R)}) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, dx dy.$$

Trecînd la coordonate polare

$$x = \rho \cos \theta,$$
$$y = \rho \sin \theta,$$

obținem

$$P((\xi, \eta) \in C_{(0,R)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho\, e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, d\rho\, d\theta = \int_0^R \rho\, e^{-\rho^2/2}\, d\rho = 1 - e^{-R^2/2}.$$

Din condiția pusă, rezultă

$$e^{-\frac{R^2}{2}} = 0{,}05,$$

sau

$$e^{\frac{R^2}{2}} = 20.$$

Urmează că

$$R = \sqrt{2 \ln 20} = 2{,}45.$$

63. *Sistemul de puncte* (X, Y) *este distribuit pe suprafața unui con cilindric drept, a cărui bază este un cerc de rază* R *cu centrul în originea axelor de coordonate.*

Se cere:

a) *Să se scrie expresia densității de distribuție.*

b) *Să se determine probabilitatea ca punctul aleator* (X, Y) *să cadă în cercul* K *de rază* a (fig. 15) *unde* $a < R$.

SOLUȚIE. Fie un punct curent pe suprafața conului $z = f(x, y)$. În ΔBAO avem

$$\frac{f(x, y)}{h} = \frac{R - \sqrt{x^2 + y^2}}{R},$$

---

[1]) Am notat cu $C_{(0,R)}$ cercul cu centrul în origine și de rază R.

de unde

$$f(x, y) = \frac{h}{R}\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

unde h este înălțimea conului.

Mărimea h, o definim astfel: ca $\iint_{(D)} f(x, y)\, dxdy = 1$.

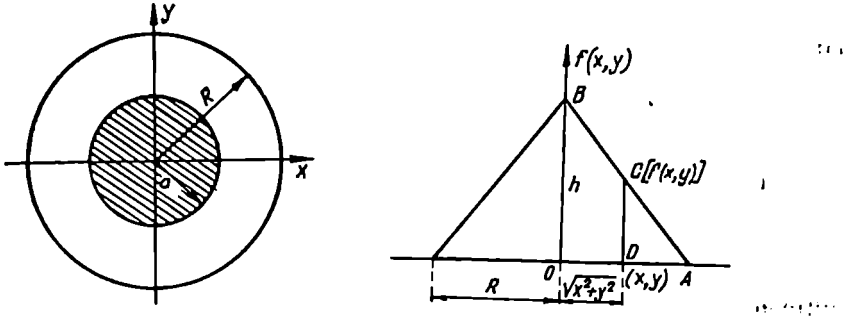


Fig. 15.

Însă, integrala dublă reprezintă tocmai volumul conului. Deci h rezultă din condiția ca volumul conului să fie egal cu unu

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = 1 \;\; ; \;\; h = \frac{3}{\pi R^2}$$

și

$$f(x, y) = \frac{3}{\pi R^3}\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

b) Probabilitatea ca punctul (X, Y) să cadă în cercul K se determină după formula

$$P((X, Y) \in K) = \iint_{(K)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Pentru calculul acestei integrale vom trece la coordonate polare

$$P((X, Y) \in K) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{3}{\pi R^3}(R - r)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{6}{R^3}\int_0^a (R - r)\, r \cdot dr =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{R}\right)^3.$$

64. *Un trăgător lovește o țintă fără eroare sistematică, distribuția de țintire fiind normală cu corelația 0 și dispersii egale. Ținta poate fi un cerc sau un pătrat, însă de arii egale.*

Se cere: pentru ce formă a țintei probabilitatea de ochire este mai mare.

SOLUȚIE. Notînd cu (x, y) coordonatele locului țintit M, acesta este o variabilă aleatoare, ce urmează o distribuție normală bidimensională cu densitatea de repartiție

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

Fie $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ două rezultate ale ochirii cu

$$x_1^2 + y_1^2 > x_2^2 + y_2^2.$$

Rezultă că $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ fapt ce apare făcînd schimbarea

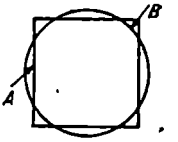


Fig. 16.

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta.$$

Obținem $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = rdrd\theta$, iar (1) devine

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} rdrd\theta,$$

care este o funcție monoton descrescătoare în r.

Însă aria A (fig. 16) este în interiorul cercului $(x^2 + y^2 \leqslant r^2)$, în timp ce B este în afara cercului $(x^2 + y^2 > r^2)$.

Se poate deci trage concluzia că ținta sub formă de cerc este lovită cu o probabilitate mai mare decît cea pentru ținta sub formă de pătrat.

65. *Să se scrie repartițiile marginale și condiționate asociate unei repartiții multinomiale.*

SOLUȚIE. Avem

$$g(x_2, x_3, \ldots, x_h \mid x_1) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_h)}{h(x_1)},$$

unde $h(x_1)$ este distribuția marginală a lui x_1, iar $g(x_2, x_3, \ldots, x_h \mid x_1)$ este distribuția vectorului $x_2, x_3, \ldots, x_h$, condiționată de x_1.

Deoarece studiem o distribuție multinomială, urmează că

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_h) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_h!} p_1^{x_1} \cdot p_1^{x_2} \ldots p_h^{x_h}. \tag{1}$$

Păstrăm pe x_1 fix și luăm $m = n - x_1$. Normalizăm probabilitățile $p_2, p_3, \ldots, p_h$

$$p_2^* = \frac{p_2}{1 - p_1}, \ldots, p_h^* = \frac{p_h}{1 - p_1}$$

și deci

$$p_2^* + p_3^* + \ldots + p_h^* = 1$$

pentru

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_h = m.$$

Ținînd seama de cele de mai înainte (1) devine

$$\frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_h!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_h^{x_h}=$$

$$=\left[\frac{n!}{x_1!\,(n-x_1)!}p_1^{x_1}(1-p_1)^{n-x_1}\right]\left[\frac{m!}{x_2!\,x_3!\ldots x_h!}p_2^{*x_2}\ldots p_h^{*x_h}\right].$$

Primul factor din membrul drept este distribuția marginală a lui x_1; care nu reprezintă altceva decît o distribuție binomială de parametru p_1 și n.

66. *Fie*

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}$$

densitatea de repartiție bidimensională a vectorului aleator (ξ,η).

Să se afle dacă variabilile ξ *și* η *sînt independente sau nu.*

SOLUȚIE. Se observă că

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Deoarece $f(x,y)$ se descompune în două funcții, dintre care una numai funcție de x, iar cealaltă funcție numai de y, decurge că variabilele ξ și η vor fi independente.

Prin urmare

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\pi(1+y^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

și

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\frac{1}{\pi(1+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi(1+y^2)},$$

de unde rezultă că

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$$

ceea ce arată că variabilele ξ și η sînt independente.

67. *Fie* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *variabile aleatoare independente, fiecare avînd densitatea de repartiție*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\qquad -\infty\leqslant x\leqslant\infty.$$

Punînd

$$y_1=\frac{\xi_1-\xi_2}{\sqrt{2}};\quad y_2=\frac{\xi_1+\xi_2-2\xi_3}{\sqrt{6}};\quad y_3=\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{\sqrt{3}},$$

să se arate că variabilele y_1, y_2, y_3 sînt independente și urmează aceeași repartiție ca și ξ_1, ξ_2, ξ_3.

SOLUȚIE. Fie $f(x_1, x_2, x_3)$ densitatea de repartiție a vectorului (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Avem

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}.$$

Din transformarea făcută, rezultă

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = \sqrt{6} \cdot y_2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3} \cdot y_3,$$
$$x_1 - x_2 = \sqrt{2} \cdot y_1;$$

sau

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3,$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3,$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} y_3 - \frac{\sqrt{6}}{3} y_2.$$

Avem

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \sqrt{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = 1$$

și

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Densitatea de repartiție a vectorului (ξ_1, ξ_2, ξ_3) se mai poate scrie

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} = f(y_1) \cdot f(y_2) \cdot f(y_3),$$

unde

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} v_i^2}; \quad i = 1, 2, 3$$

ceea ce arată că variabilele y_1, y_2, y_3 sînt independente și urmează aceeași repartiție ca și ξ_1, ξ_2, ξ_3.

68. *Fie ξ_1, ξ_2, ξ_3 variabile aleatoare independente fiecare avînd densitatea de repartiție*

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty.$$

Punînd

$$\xi_1 = r \cos \varphi \cos \psi,$$
$$\xi_2 = r \cos \varphi \sin \psi,$$
$$\xi_3 = r \sin \varphi.$$

Să se arate că variabilele r, φ, ψ sînt independente și că densitatea de repartiție a lui r este

$$dF = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^2 dr.$$

SOLUȚIE. Notăm $F(x_1, x_2, x_3) = F(x_1)F(x_2)F(x_3)$. Atunci rezultă

$$dF = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Din transformarea făcută, obținem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

și

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, \varphi, \psi)} dr\, d\varphi\, d\psi = r^2 \cos \varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi.$$

Prin urmare

$$dF = k e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 \cos \varphi dr\, d\varphi\, d\psi$$

și mai departe

$$dF_1 = k_1 e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 dr \quad , \quad 0 \leqslant r \leqslant \infty$$
$$dF_2 = k_2 \cos \varphi d\varphi$$
$$dF_3 = k_3 d\psi \qquad , \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$$

ceea ce arată că r, φ, ψ sînt independente.

Determinăm constanta k_1 din condiția că dF_1 este o densitate de repartiție, adică

$$k_1 \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 \, dr = 1$$

de unde

$$k_1 = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 \, dr},$$

și făcînd schimbarea $r^2 = 2u$, obținem $k_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Deci, densitatea de repartiție a variabilei r este

$$dF = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 \, dr.$$

69. *Fie ξ și η două variabile aleatoare repartizate normal al căror coeficient de corelație este ρ. Să se arate că variabilele*

$$\beta_1 = \frac{\xi}{\sigma(\xi)} - \rho(\xi, \eta) \frac{\eta}{\sigma(\eta)}$$

și

$$\beta_2 = \sqrt{1 - \rho^2(\xi, \eta)} \cdot \frac{\eta}{\sigma(\eta)}$$

sînt independente și repartizate normal.

SOLUȚIE. Probabilitatea elementară pentru perechea (ξ, η) de variabilele aleatoare este

$$f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi \sigma(\xi) \sigma(\eta) \sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x}{\sigma(\xi)} \right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho \frac{xy}{\sigma(\xi)\, \sigma(\eta)} + \left(\frac{x}{\sigma(\eta)} \right)^2 \right] \right\} dx\, dy.$$

Punînd

$$z_1 = \frac{x}{\sigma(\xi)} - \rho \frac{y}{\sigma(\eta)},$$

$$z_2 = \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \frac{y}{\sigma(\eta)}.$$

rezultă

$$z_1^2 + z_2^2 = \left(\frac{x}{\sigma(\xi)}\right)^2 - 2\rho\frac{xy}{\sigma(\xi)\,\sigma(\eta)} + \left(\frac{y}{\sigma(\eta)}\right)^2$$

iar

$$\frac{D(z_1, z_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma(\xi)} & \frac{\rho}{\sigma(\eta)} \\ 0 & \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma(\eta)} \end{vmatrix},$$

din care

$$J = \frac{\sigma(\xi)\,\sigma(\eta)}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Probabilitatea elementară pentru perechea (β_1, β_2) este

$$f(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(z_1^2 + z_2^2)\right] dz_1\,dz_2$$

sau

$$f(z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} z_1^2\right] dz_1 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)} z_2^2\right] dz_2$$

ceea ce arată că variabilele β_1 și β_2 sînt independente și repartizate normal.

70. *Dacă x_1 și x_2 sînt variabile aleatoare independente avînd o distribuție rectangulară $R\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ să se arate că*

$$\sqrt{-2\ln x_1}\cos 2\pi x_2 \text{ și } \sqrt{-2\ln x_1}\sin 2\pi x_2$$

sînt independente și distribuite normal $N(0, 1)$.

SOLUȚIE. Fie

$$u = \sqrt{-2\ln x_1}\cdot\cos 2\pi x_2$$

și

$$v = \sqrt{-2\ln x_1}\cdot\sin 2\pi x_2.$$

Ridicînd la pătrat ambii membri și adunîndu-i obținem

$$-2\ln x_1 = u^2 + v^2,$$

de unde

$$x_1 = e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

Mai departe

$$u = \sqrt{u^2 + v^2} \cos 2\pi x_2,$$

sau

$$x_2 = \frac{\arccos \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{2\pi}.$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} -ue^{-\frac{u^2+v^2}{2}} & -ve^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \\ -\frac{v}{2\pi(u^2+v^2)} & \frac{u}{2\pi(u^2+v^2)} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}},$$

Rezultă că

$$f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} du\, dv$$

ceea ce dovedește că u și v sînt independente și distribuite normal $N(0, 1)$.

71. *Să se demonstreze că dacă variabilele ξ și η sînt independente și repartizate normal cu parametrii $m_1 = m_2 = 0$ și $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ atunci variabilele*

$$\beta = \xi^2 + \eta^2 \quad , \quad \delta = \frac{\xi}{\eta}$$

sînt de asemenea independente.

SOLUȚIE. Deoarece ξ și η sînt independente și urmează o lege normală $N(0, \sigma)$ rezultă că $\xi^2 + \eta^2$ urmează o lege χ^2 cu două grade de libertate, a cărei densitate de repartiție este

$$f_\beta(x) = \frac{1}{2^{\frac{2}{2}} \sigma^2 \Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} x^{\frac{2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x \in (0, \infty).$$

Fie $f_\delta(y)$ densitatea de repartiție a variabilei $\delta = \frac{\xi}{\eta}$. Atunci

$$f_\delta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z) f_\eta(y \cdot z) |z|\, dz =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} z f_\xi(z) f_\eta(y \cdot z)\, dz + \int_0^{\infty} z f_\xi(z) f_\eta(yz)\, dz.$$

Cum ξ și η sînt repartizate normal cu $m_1 = m_2 = 0$ și $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ rezultă că

$$f_\delta(y) = -\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{0} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2 z^2}{2\sigma^2}}\,dz + \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{0}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2 z^2}{2\sigma^2}}\,dz =$$

$$= \frac{2}{2\pi\sigma^2}\int_{0}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}(1+y^2)}\,dz = \frac{1}{\pi(1+y^2)}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx,$$

de unde

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Funcția de repartiție a variabilelor β și δ este

$$F(u, v) = P(\beta < u, \delta < v) = P\left(\xi^2 + \eta^2 < u, \frac{\xi}{\eta} < v\right) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u \\ \frac{x}{y}<v}} f_\xi(x) f_\eta(y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u \\ \frac{x}{y}<v}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2<u \\ \frac{x}{y}<v}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta,$$

rezultă $x^2 + y^2 = \rho^2$, iar determinantul funcțional

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho.$$

Atunci

$$F(u, v) = \frac{1}{4\pi\sigma^2}\int_0^{\sqrt{u}} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\,d\rho^2\left(\int_{\operatorname{arcctg} v}^{\pi} d\theta + \int_{\operatorname{arcctg} v}^{0} d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{\sqrt{u}}\right)\left(\theta\Big|_{\operatorname{arcctg} v}^{\pi} + \theta\Big|_{\operatorname{arcctg} v}^{0}\right)$$

sau

$$F(u, v) = \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\right)(\pi - 2\operatorname{arcctg} v).$$

Avem

$$\frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{1+v^2}$$

ceea ce arată că variabilele $\beta = \xi^2 + \eta^2$ și $\delta = \frac{\xi}{\eta}$ sînt independente.

72. *Fie X o variabilă aleatoare nenegativă, și fie Y o variabilă aleatoare distribuită uniform pe intervalul $(0, X)$. Fie $Z = X - Y$. Să se arate că Y și Z sînt independente dacă și numai dacă X are densitatea de repartiție*

$$f(x) = \begin{cases} a^2 \cdot xe^{-ax} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \text{ pentru } a \geqslant 0.$$

SOLUȚIE. Fie $F(x) = P(X \leqslant x)$, $G(y) = P(Y > y)$. Atunci

$$G(y) = \int_{y+}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dF(x), \ (y \geqslant 0).$$

Se observă că $P(Z > z) = G(z)$ pentru $z \geqslant 0$. De asemenea, pentru $y, z \geqslant 0$,

$$P(Y > y, Z > z) = \int_{(y+z)+}^{\infty} \left(1 - \frac{y+z}{x}\right) dF(x),$$

deoarece $Y > y$, $Z > z$ sînt echivalente cu $X = Y + Z > y + z$ și $y < Y < X - z$. Astfel, independența lui Y și Z este echivalentă cu $G(y+z) = G(y) \cdot G(z)$. Urmează că $G(y) = [G(1)]^y$ pentru $y > 0$ raționali. Deoarece G este monotonă, aceasta se păstrează pentru toți $y > 0$. Dacă $G(1) = 0$, atunci $G(y) = 0$ pentru toți $y > 0$, care implică că $P(Y = 0) = P(Z = 0) = P(X = 0) = 1$.

Lăsînd la o parte acest caz banal, putem scrie $G(y) = e^{-ay}$ pentru un $a > 0$. Acum, pentru $h > 0$,

$$G(y + h) - G(y) = -\int_{y+}^{y+h} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dF(x) - h \int_{(y+h)+}^{\infty} \frac{1}{x} dF(x).$$

Prima integrală nu depășește, în valoare absolută

$$(h/y) \int_{y+}^{y+h} dF(x) = (h/y) P(y < X \leqslant y + h) = (h/y) o(1) \tag{1}$$

Astfel

$$-ae^{-ay} = \lim_{h \to 0+} \frac{G(y+h) - G(y)}{h} = -\int_{y+}^{\infty} \frac{1}{x} dF(x) =$$

$$= \frac{1}{y} \left(e^{-ay} - \int_{y+}^{\infty} dF(x)\right) = \frac{1}{y} (e^{-ay} - 1 + F(y)),$$

de unde

$$F(y) = 1 - (1 + ay)\, e^{-ay}$$

și

$$F'(y) = f(y) = a^2 y e^{-ay} \quad (y \geqslant 0).$$

Suficiența se stabilește ușor.

73. *Dacă* ξ_1 *și* ξ_2 *sînt variabilele aleatoare independente, urmînd o repartiție* $\Gamma(k_1)$, *respectiv* $\Gamma(k_2)$, *să se arate că variabilele* $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ *și* $\eta_2 = \dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$ *sînt independente și urmează repartiția* $\Gamma(k_1 + k_2)$ *respectiv* $B(k_1, k_2)$.

SOLUȚIE. Fie $f(x, y)$ densitatea de repartiție a vectorului (ξ_1, ξ_2). Avem

$$f(x, y)\, dx\, dy = f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy = \frac{1}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)}\, x^{k_1-1}\, y^{k_2-1}\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy. \quad (1)$$

Efectuînd transformarea

$$x + y = u$$

$$\frac{x}{x+y} = v,$$

adică $x = uv$; $y = u(1 - v)$ relația (1) devine

$$f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy = \frac{1}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)}\, (uv)^{k_1-1}\, u^{k_2-1}\, (1 - v)^{k_2-1}\, e^{-u} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\, dv.$$

Avem

$$\frac{D(x, y)}{D(u, y)} = \text{valoarea absolută} \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = u \quad (u > 0),$$

de unde

$$f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy = \frac{1}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)}\, u^{k_1+k_2-1}\, e^{-u} v^{k_1-1}\, (1 - v)^{k_2-1}\, du\, dv. \quad (2)$$

Cum

$$B(k_1, k_2) = \frac{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1 + k_2)},$$

rezultă că

$$\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2) = \Gamma(k_1 + k_2)\, B(k_1, k_2).$$

Expresia (2) se mai poate scrie

$$f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy = \frac{1}{\Gamma(k_1 + k_2)}\, u^{k_1+k_2-1} \cdot e^{-u}\, du\, \frac{1}{B(k_1, k_2)}\, v^{k_1-1}\, (1 - v)^{k_2-1}\, dv,$$

ceea ce arată că variabilele η_1 și η_2 sînt independente și au repartițiile

$$g_1(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k_1+k_2)} u^{k_1+k_2-1} e^{-u}, & u > 0, \\ 0 & u \leqslant 0. \end{cases}$$

și respectiv

$$g_2(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(k_1, k_2)} v^{k_1-1} (1-v)^{k_2-1} & v \in (0, 1) \\ 0 & v \notin (0, 1). \end{cases}$$

74. *Vectorul aleator* (ξ, η) *are densitatea de repartiție:*

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)} x^{k_1-1} (y-x)^{k_2-1} e^{-y} \textit{ pentru} & 0 < x < y < \infty, \quad (1) \\ 0 & \textit{în rest.} \end{cases}$$

Să se arate că repartițiile variabilelor ξ *și* η *sînt* $\Gamma(k_1)$ *și respectiv* $\Gamma(k_1+k_2)$.

SOLUȚIE. Pentru a găsi repartiția variabilei aleatoare ξ vom integra egalitatea (1) în raport cu y între x și ∞. Avem

$$f_\xi(x) = \frac{x^{k_1-1}}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)} \int_x^\infty (y-x)^{k_2-1} e^{-y}\, dy.$$

Punînd

$$y - x = u,$$

obținem

$$f_\xi(x) = \frac{x^{k_1-1} e^{-x}}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)} \int_0^\infty e^{-u} u^{k_2-1}\, du,$$

de unde

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k_1)} x^{k_1-1} e^{-x} & \text{dacă } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Repartiția variabilei aleatoare η se obține integrînd (1) în raport cu x între 0 și y

$$f_\eta(y) = \frac{e^{-y}}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)} \int_0^y x^{k_1-1} (y-x)^{k_2-1}\, dx.$$

Punînd

$$x = yu,$$

găsim

$$f_\eta(y) = \frac{e^{-y} y^{k_1+k_2-1}}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)} \int_0^1 u^{k_1-1} (1-u)^{k_2-1}\, du,$$

sau

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k_1+k_2)} y^{k_1+k_2-1} e^{-y} & \text{dacă } 0 < y < \infty, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

75. *Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variabile aleatoare independente și $h(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ o funcție de k variabile $(k < n)$. Atunci variabilele aleatoare $h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ sînt independente, dacă:*

a) *variabilele ξ_i sînt discrete,*

b) *variabilele ξ_j au densități de repartiție $f_j(x)$ continue, iar $h(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ este o funcție continuă.*

SOLUȚIE. a) Să notăm cu x_{ij}, $j = 1, 2, \ldots$ valorile pe care le ia variabila aleatoare ξ_i și fie

$$P(\xi_i = x_{ij}) = P_{ij}.$$

Va trebui să arătăm că

$$P(\eta = x,\ \xi_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \xi_n = x_n) = P(\eta = x)\, P(\xi_{k+1} = x_{k+1}) \ldots \\ \ldots P(\xi_n = x_n), \tag{1}$$

unde

$$\eta = h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k), \text{ iar } x \in R.$$

Cum însă

$$P(\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i) \tag{2}$$

pot alege pe $x_1, \ldots, x_k$ astfel ca $h(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x$ și din (2) rezultă (1).

b) Va trebui să arătăm că

$$P(\eta < x; \xi_{k+1} < x_{k+1}, \ldots, \xi_n < x_n) = P(\eta < x) \prod_{i=k+1}^{n} P(\xi_i < x_i).$$

Fie K_x un domeniu k dimensional, astfel încît

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_k) < x.$$

Atunci

$$P(\eta < x, \xi_{k+1} < x_{k+1}, \ldots, \xi_n < x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_{k+1}} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} \left[\underbrace{\iint \ldots \int}_{K_x} f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1\, du_2 \ldots du_k \right] du_{k+1} \ldots du_n =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x_{k+1}} f_{k+1}(u)\, du \right) \ldots \left(\int_{-\infty}^{x_n} f_n(u)\, du \right) \left(\underbrace{\iint \ldots \int}_{K_x} f_1(u_1) \ldots f_k(u_k)\, du_1 \ldots du_k \right) =$$

$$= P(\eta < x) \prod_{i=k+1}^{n} P(\xi_i < x_i).$$

76. Dacă $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *este o densitate de repartiție continuă și diferențiabilă, nenulă cu proprietatea că pentru orice* x, y, z *reali, funcția*

$$f(x-t)\,f(y-t)\,f(z-t)$$

își atinge maximul în punctul $t = \frac{x+y+z}{3}$, *atunci*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right].$$

SOLUȚIE. Conform ipotezei $f(x) > 0$. Punem

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad s = \frac{x+y+z}{3}.$$

Atunci

$$g(x-s) + g(y-s) + g(z-s) = 0. \tag{1}$$

Pentru $x = y = z$, obținem $g(0) = 0$.

Fie x, y oarecare și $z = \frac{x+y}{2}$; atunci și $s = \frac{x+y}{2}$;

Deoarece $g(0) = 0$ și ținînd seama de (1), rezultă că

$$g\left(\frac{x-y}{2}\right) + g\left(\frac{y-x}{2}\right) = 0.$$

Urmează că $g(x)$ este o funcție impară.

Fie $u = x - s$, $v = y - s$, atunci $z - s = -(u+v)$, dar formula (1) se poate scrie sub forma

$$g(u) + g(v) = g(u+v). \tag{2}$$

Deoarece $g(u)$ conform ipotezei este continuă, urmează din (2) că

$$g(x) = C\,x; \quad C = \text{constant}.$$

Prin integrare

$$f(x) = A \exp\left[\frac{Cx^2}{2}\right].$$

Deoarece $f(x)$ este o densitate de repartiție, avem

$$C = -\frac{1}{\sigma^2} \text{ și } A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ cu } \sigma > 0.$$

77. *Fie* n *variabile aleatoare continue* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *și variabila aleatoare* $\eta = g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. *Să presupunem că densitatea de repartiție* n*-dimensională a variabilelor* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *este constantă pe suprafața din spațiul cu* n *dimensiuni, dată de ecuația* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$.

Vom nota

$$\rho_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_g(y)$$

pentru toate punctele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de pe suprafața de mai înainte.*

Să se determine densitatea de repartiție a variabilei aleatoare η *presupunînd că* g *este o funcție continuă.*

SOLUȚIE. În condițiile de mai înainte densitatea de repartiție a variabilei η este dată de

$$\rho_\eta(y) = f_g(y)\frac{dV_g(y)}{dy},$$

unde

$$V_g(y) = \iint\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant y\}$$

adică $V_g(y)$ este volumul interior suprafeței din spațiul cu n dimensiuni, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$.

Dacă notăm cu

$$B(y, h) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ y < g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant y + h\},$$

atunci după teorema mediei pentru integrale, obținem

$$F_\eta(y+h) - F_\eta(y) = \iint\ldots\int_{B(y,h)} \rho_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \rho_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1', x_2'\ldots x_n')\,[V_g(y+h) - V_g(y)]$$

unde $F_\eta(.)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare η, iar $(x_1', x_2', \ldots, x_n') \in B(y, h)$.

Cum funcția $f_g(y)$ este continuă, rezultă că

$$\lim_{h\to 0} \rho_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = f_g(y)$$

și

$$\lim_{h\to 0} \frac{V_g(y+h) - V_g(y)}{h} = \frac{dV_g(y)}{dy}$$

deci

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_\eta(y+h) - F_\eta(y)}{h} = f_g(y)\cdot\frac{dV_g(y)}{dy}.$$

78. *Fie* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *n variabile aleatoare independente, avînd aceeași funcție de repartiție* F *(respectiv aceeași densitate de repartiție* f*). Să se determine funcția de repartiție a variabilei aleatoare:*

$$\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

SOLUȚIE. Dacă notăm cu $U = \max(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)$ și cu $V = \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, atunci

$$\eta = U - V.$$

Variabilele aleatoare U și V nu sînt independente; însă variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fiind independente și avînd aceeași funcție de repartiție au loc relațiile

$$P(\omega : U(\omega) < x) = P(\omega : \xi_1(\omega) < x, \xi_2(\omega) < x, \ldots, \xi_n(\omega) < x) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} P(\omega : \xi_j(\omega) < x) = [F(x)]^n$$

și

$$P(\omega : V(\omega) \geqslant x) = P(\omega : \xi_1(\omega) \geqslant x, \xi_2(\omega) \geqslant x, \ldots, \xi_n(\omega) \geqslant x) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} P(\omega : \xi_j(\omega) \geqslant x) = [1 - F(x)]^n.$$

Să notăm acum cu $F(x, y)$ funcția de repartiție a vectorului aleator (U, V), adică

$$F(x, y) = P(\omega : U(\omega) < x, V(\omega) < y).$$

$$\text{Cum } \{\omega : U(\omega) < x\} = \{\omega : U(\omega) < x, V(\omega) < y\} \cup$$

$$\cup \{\omega : U(\omega) < x, V(\omega) \geqslant y\}$$

prin aplicarea probabilității, obținem

$$P(\omega : U(\omega) < x) = P(\omega : U(\omega) < x, V(\omega) < y) +$$

$$+ P(\omega : U(\omega) < x, V(\omega) \geqslant y),$$

sau încă

$$F(x, y) = [F(x)]^n - P(\omega : U(\omega) < x, V(\omega) \geqslant y).$$

Să evaluăm acum $P(\omega : U(\omega) < x, V(\omega) \geqslant y)$. Pentru aceasta vom examina separat cazurile $x \leqslant y$ și $y < x$.

Dacă $x \leqslant y$, atunci evenimentul

$$\{\omega : \max(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) < x \leqslant y \leqslant \min(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))\}$$

este imposibil, și deci în acest caz

$$P(\omega : U(\omega) < x, V(\omega) \geqslant y) = 0.$$

Dacă $y < x$, atunci evenimentul

$$\{\omega ; y \leqslant \min(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \leqslant \max(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) < x\} =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : y \leqslant \xi_j(\omega) < x\}$$

și cum

$$P(\omega : y \leqslant \xi_j(\omega) < x) = F(x) - F(y),$$

rezultă

$$P(\omega : U(\omega) < x,\ V(\omega) \geqslant y) = [F(x) - F(y)]^n.$$

De aici urmează ca funcția de repartiție bidimensională a vectorului aleator (U, V) este

$$F(x, y) = \begin{cases} [F(x)]^n & \text{dacă } x \leqslant y, \\ [F(x)]^n - [F(x) - F(y)]^n & \text{dacă } x > y. \end{cases}$$

Dacă acum presupunem că variabilele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ au aceeași densitate de repartiție f, și dacă notăm cu $w(x, y)$ densitatea de repartiție a vectorului aleator (U, V), atunci

$$w(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant y, \\ n(n-1)\,[F(x) - F(y)]^{n-2} f(x) f(y) & \text{dacă } x > y. \end{cases}$$

Să trecem acum la aflarea funcției de repartiție a variabilei aleatoare $\eta = U - V$. Din definiția funcției de repartiție rezultă că avem

$$F_\eta(z) = P(\omega : U(\omega) - V(\omega) < z).$$

Presupunînd că $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ au densitatea f atunci

$$F_\eta(z) = \iint\limits_{x-y<z} w(x, y)\, dx\, dy.$$

Cum $w(x, y) = 0$ dacă $x \leqslant y$, rezultă că

$$F_\eta(z) = P(\omega : U(\omega) - V(\omega) < z) = 0 \text{ dacă } z \leqslant 0.$$

Dacă $z > 0$, atunci

$$F_\eta(z) = P(\omega : U(\omega) - V(\omega) < z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{x-z}^{+\infty} w(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x} w(x, x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{z} dy \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, x-y)\, dx.$$

Derivînd în raport cu z găsim densitatea de repartiție a variabilei aleatoare η și anume

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, x-z)\, dx.$$

Cum $w(x, y) = 0$ dacă $x \leqslant y$, rezultă că $w(x, x-z) = 0$ dacă $x \leqslant x - z$, adică $z \leqslant 0$. Așadar

$$f_\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } z \leqslant 0, \\ n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x) - F(x-z)]^{n-2} f(x) f(x-z)\, dx & \text{dacă } z > 0. \end{cases}$$

79. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abscisele a n puncte aleatoare $M_1, M_2, \ldots, M_n$ luate arbitrar și independent, pe segmentul (0,1). Dacă Y este lungimea celui mai mic interval dintre cele $(n+1)$ intervale determinate pe (0, 1) de cele n puncte să se afle $P(Y < \tau)$.*

SOLUȚIE. Punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ pot fi dispuse pe segmentul (0, 1) în $n!$ moduri. Fie $O_1, O_2, \ldots, O_i, \ldots, O_{n!}$ aceste diferite moduri de dispunere, unde O_1 corespunde cazului

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_j \leqslant x_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Toate aceste moduri sînt egal probabile, deci

$$P(O_i) = \frac{1}{n!}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n!$$

Calculăm mai întîi $P_{O_i}(Y > \tau)$, (adică probabilitatea ca $Y > \tau$ condiționată de faptul că avem așezarea O_i).

Cum însă $P_{O_i}(Y > \tau)$ este aceeași, oricare ar fi $1 \leqslant i \leqslant n!$ este suficient să calculăm $P_{O_1}(Y > \tau)$ și avem

$$P_{O_1}(Y > \tau) = \frac{P(O_1; Y > \tau)}{P(O_1)}.$$

Să punem

$$z_1 = x_1 - \tau, \; z_2 = x_2 - x_1 - \tau, \ldots, z_j = x_j - x_{j-1} - \tau, \ldots$$

$$\ldots, z_n = x_n - x_{n-1} - \tau.$$

Dacă se consideră $x_j : 1 \leqslant j \leqslant n$ drept coordonate ale unui punct aleator $Q \in E$ (spațiul euclidian n — dimensional raportat la n axe rectangulare), atunci Q admite densitatea de repartiție

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & (x_1, \ldots, x_n) \in \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} (0, 1) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Dacă acum considerăm z_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, drept coordonate ale unui punct aleator R dintr-un spațiu euclidian E_n' (raportat la n axe rectangulare), întrucît

$$\left| \frac{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| = 1,$$

rezultă că și R admite tot o densitate rectangulară egală cu unu.

În aceste condiții putem scrie

$$P(O_1; Y > \tau) = \iint_D \ldots \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \iint_{D'} \ldots \int \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_n$$

unde D este domeniul din E_n, $Q \in D$, pentru care avem în același timp succesiunea O_1 și $Y > \tau$; D' este domeniul corespunzător pentru punctul R. Obținem așa dar

$$P(O_1;\ Y > \tau) = V(D')^*)$$

Din condițiile ce definesc pe D:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_j \leqslant x_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1 \\ Y > \tau \end{cases}$$

urmează condițiile ce definesc pe D':

$$\begin{cases} z_j > 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \\ \sum_{j=1}^{n} z_j < 1 - (n+1)\tau. \end{cases}$$

Rezultă că domeniul D' este în spațiul E'_n un „tetraedru" regulat cu fețele perpendiculare, de înălțime $[1 - (n+1)\tau]$, cu vîrful în originea coordonatelor și a cărui bază este în planul de ecuație

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = 1 - (n+1)\tau.$$

Urmează că volumul lui D' este

$$\frac{1}{n!}[1 - (n+1)\tau]^n,$$

de unde se deduce că

$$P_{O_i}(Y > \tau) = P_{O_1}(Y > \tau) = [1 - (n+1)\tau]^n$$

și deci

$$P(Y > \tau) = \sum_{i=1}^{n!} P(O_i)\, P_{O_i}(Y > \tau) = [1 - (n+1)\tau]^n,$$

care rezolvă problema, întrucît

$$P(Y < \tau) = 1 - P(Y > \tau).$$

80. *Să se arate că dacă două variabile aleatoare η și β urmează o lege normală bidimensională $(m_1, \sigma_1; m_2, \sigma_2; \rho)$ atunci variabila aleatoare*

$$\xi = \frac{\eta}{\beta}$$

urmează o lege de probabilitate de tip Cauchy, cu densitatea

$$f_\xi(x) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2\, e^{-C}}{\pi\,[\sigma_2^2 x^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 x + \sigma_1^2]}\,[1 + \Phi(x)],$$

unde C este o constantă, iar $\Phi(x)$ o funcție mărginită.

*) $V(D')$ volumul — domeniului D'.

SOLUȚIE. Fie

$$f(y, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(y-m_1)(z-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{z-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

densitatea de repartiție bidimensională a variabilei (η, β).

Atunci se știe că

$$F_\xi(x) = P\left(\frac{\eta}{\beta} < x\right) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{zx} f(y, z)\, dy\, dz + \int_{-\infty}^0 \int_{zx}^\infty f(y, z)\, dy\, dz$$

și derivînd în raport cu x obținem

$$f_\xi(x) = \int_0^\infty zf(zx, x)\, dz - \int_{-\infty}^0 zf(zx, x)\, dz.$$

Deci

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\left[\int_0^\infty ze^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{xz-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(xz-m_1)(xz-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{z-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dz - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^0 ze^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{xz-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(xz-m_1)(xz-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{z-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dz\right].$$

Se observă că expresia de la exponent se poate scrie

$$\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right] z^2 - 2\rho\left[\frac{m_1 x}{\sigma_1^2} + \frac{m_1 + m_2 x}{\sigma_1\sigma_2}\rho + \frac{m_2}{\sigma_2^2}\right] z +$$

$$+ \left[\frac{m_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{m_1 m_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{m_2^2}{\sigma_2^2}\right].$$

Să notăm cu

$$A_1 = \frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2},$$

$$B_1 = \frac{m_1 x}{\sigma_1^2} + \rho\frac{m_1 + m_2 x}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{m_2}{\sigma_2^2},$$

$$C_1 = \frac{m_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{m_1 m_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{m_2^2}{\sigma_2^2}.$$

Se observă de asemenea că forma pătratică în z de mai înainte este pozitivă pentru toate valorile lui x și z cu excepția cazului $xz - m_1 = 0$, $z - m_2 = 0$, ceea ce revine la cazul $x = \frac{m_1}{m_2}$ și $z = m_2$.

Deci

$$B_1^2 - A_1C_1 < 0,$$

pentru $x \neq \frac{m_1}{m_2}$, iar pentru $x = \frac{m_1}{m_2}$ se anulează.

Notînd

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)} A_1 = A\,;\ \frac{1}{2(1-\rho^2)} B_1 = B\,;\ \frac{1}{2(1-\rho^2)} C_1 = C,$$

se obține

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\left[\int_0^\infty ze^{-(Az^2-2Bz+C)}\,dz - \int_{-\infty}^0 ze^{-(Az^2-2Bz+C)}\,dz\right].$$

Cum însă

$$Az^2 - 2Bz + C = A\left(z - \frac{B}{A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{A},$$

dacă facem substituția

$$\sqrt{A}\left(z - \frac{B}{A}\right) = u,$$

$$z = \frac{u}{\sqrt{A}} + \frac{B}{A},$$

paranteza de mai înainte devine

$$e^{\frac{B^2}{A}-C}\left[\int_{-\frac{B}{\sqrt{A}}}^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{A}} + \frac{B}{A}\right)e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{A}} - \int_{-\infty}^{-\frac{B}{\sqrt{A}}} \left(\frac{u}{\sqrt{A}} + \frac{B}{A}\right)e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{A}}\right] =$$

$$= \frac{1}{A}e^{\frac{B^2}{A}-C}\left[e^{-\frac{B^2}{A}} + \frac{B}{\sqrt{A}}\int_{-\frac{B}{\sqrt{A}}}^{\frac{B}{\sqrt{A}}} e^{-u^2}\,du\right] = \frac{1}{A}e^{-C}\left[1 + \frac{B^2}{A}\int_{-1}^1 e^{\frac{B^2}{A}(1-t^2)}\,dt\right].$$

Se deduce cu ușurință că

$$f_\xi(x) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2}{\pi\,[\sigma_2^2x^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2x + \sigma_1^2]}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{m_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{m_1m_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{m_2^2}{\sigma_2^2}\right]}\left[1 + 2\frac{B^2}{A}\int_0^1 e^{\frac{B^2}{A}(1-t^2)}dt\right].$$

Dacă $m_1 = m_2 = 0$, deci cînd $B = C = 0$, $A \neq 0$ se obține

$$f_\xi(x) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2}{[\sigma_2^2x^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2x + \sigma_1^2]\pi}$$

adică distribuția Cauchy.

Am văzut însă că

$$B_1^2(x) - A_1(x)C_1 \leqslant 0$$

sau

$$\frac{B_1^2(x)}{A_1(x)} \leqslant C,$$

unde

$$C = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{m_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{m_1 m_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{m_2^2}{\sigma_2^2}\right].$$

Prin urmare

$$1 < \int_0^1 e^{\frac{B^2(x)}{A(x)}(1-t^2)}\,dt < \int_0^1 e^{C(1-t^2)}\,dt.$$

Notăm

$$2\frac{B^2(x)}{A(x)}\int_0^1 e^{\frac{B^2(x)}{A(x)}(1-t^2)}\,dt = \Phi(x),$$

unde $\Phi(x)$ este o funcție definită pentru orice x și în plus este o funcție continuă și mărginită.

Rezultă, atunci, că

$$f_\xi(x) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2\,e^{-C}}{\pi\,[\sigma_2^2 x^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 x + \sigma_1^2]}\,[1 + \Phi(x)].$$

81. *Să se arate că dacă Q este funcția de concentrație a funcției de distribuție $F(x)$, atunci pentru orice $L \geqslant 0$ există un număr real x_L, astfel încît*

$$Q(L) = F(x_L + L + 0) - F(x_L - 0).$$

SOLUȚIE. Dacă $L = 0$, problema este rezolvată imediat luînd drept x_L orice număr, dacă F este continuă, iar în cazul în care F nu este continuă, luînd x_L ca un punct în care se produce cea mai mare discontinuitate a lui F.

Fie $L > 0$. În acest caz și $Q(L) > 0$. Fie

$$X = \left\{x \,|\, F(x + L + 0) - F(x - 0) > \frac{1}{2}Q(L)\right\}.$$

Mulțimea X nu este vidă și $X \subset [K-L, M]$ unde $K < M$; K, M sînt numere reale ce satisfac condițiile

$$F(M) > 1 - \frac{1}{2}Q(L)\,;\; F(K) < \frac{1}{2}\,Q(L).$$

După teorema lui Bolzano-Weierstrass există un șir $\{x_n\}$, ale cărui elemente nu sînt neapărat distincte, din X astfel ca, pentru un x_0, $x_n \to x_0$ pentru $n \to \infty$ și

$$F(x_n + L + 0) - F(x_n - 0) \to Q(L).$$

Pentru $\varepsilon > 0$, există N_ε, astfel încît pentru toți $n > N_\varepsilon$,

$$F(x_n + L + 0) < F(x_0 + L + 0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

și

$$F(x_n - 0) > F(x_0 - 0) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci $F(x_0 + L + 0) - F(x_0 - 0) + \varepsilon > Q(L)$, iar pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar și din definiția funcției de concentrație Q, obținem

$$x_0 = x_L.$$

82. *Fie* $\{\xi_n\}$ *un șir de variabile aleatoare independente astfel încît* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *converge aproape sigur. Să se arate că dacă:*

Q_n *este funcția de concentrație a variabilei* $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$;

Q_0 *este funcția de concentrație a sumei* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(L) = Q_0(L),$$

pentru orice $L \geqslant 0$.

SOLUȚIE. Vom considera mai întîi cazul în care $L = 0$ și $Q_0(0) = 0$.

Dacă notăm cu F_0 funcția de distribuție a $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$, atunci din proprietățile funcției de concentrație, faptul că $Q_0(0) = 0$ implică că F_0 este continuă. Deci este uniform continuă și pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar există $\delta > 0$, astfel încît dacă $|x' - x''| < \delta$, atunci

$$|F_0(x') - F_0(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Deoarece $F_n \to F_0$ uniform, există N, astfel încît pentru $n > N_\varepsilon$

$$|F_0(x) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pentru toți x. Deci, pentru toți n, $n > N_\varepsilon$ și $0 < L < \delta$,

$$\sup_x \{F_n(x + L + 0) - F_n(x - 0)\} \leqslant \sup_x \{|F_n(x + L + 0) - F_0(x + L)| + |F_0(x + L) - F_0(x)| + |F_0(x) - F_n(x - 0)|\} \leqslant \varepsilon$$

sau $Q_n(0) \to 0$, pentru $n \to \infty$.

Vom considera acum cazul rămas $L \geqslant 0$ și $Q_0(L) > 0$.

Observație: dacă $L > 0$ atunci automat $Q_0(L) > 0$.

Mai mult, $Q_n(L) \geqslant Q_0(L)$ pentru toți n și toți L; de asemenea $Q_n(L) \geqslant Q_{n+1}(L)$ pentru toți n și toți L și prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(L) \geqslant Q_0(L).$$

Pentru orice n, după problema precedentă, există x_n astfel încît

$$Q_n(L) = F_n(x_n + L - 0) - F_n(x_n - 0),$$

unde F_n este funcția de distribuție a variabilei $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

Este ușor de arătat că șirul $\{x_n\}$ este mărginit.

În adevăr, fie $K < M$ astfel ca

$$F_0(K) < \frac{1}{2} Q_0(L), \quad F_0(M) > 1 - \frac{1}{2} Q_0(L).$$

În al doilea rînd, există N astfel încît, pentru toți $n > N$, avem

$$|F_0(K) - F_n(K)| < \frac{1}{4} Q_0(L)$$

și

$$|F_0(M) - F_n(M)| < \frac{1}{4} Q_0(L).$$

Pentru K, M puncte de continuitate ale funcției F_0, fie

$$\alpha = \min\{K - L, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ și } \beta = \max\{M, x_1, x_2, \ldots, x_N\}.$$

Avem $\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$ pentru toți n. Deci există un subșir $\{x_{n'}\}$ a lui $\{x_n\}$ astfel încît

$$\lim_{n' \to \infty} x_{n'} = x_0$$

Dacă $\{Q_{n'}\}$ este șirul funcțiilor de concentrație corespunzătoare funcțiilor de distribuție $\{F_{n'}\}$, atunci

$$\lim_{n'} Q_{n'}(L) = \lim_{n} Q_n(L).$$

Fără a restrînge generalitatea vom presupune că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Vom arăta acum că $Q_0(L) = F_0(x_0 + L + 0) - F_0(x_0 - 0)$ și $Q_n(L) \to Q_0(L)$. Se observă că pentru $\delta > 0$

$$F_n(x_0 + L + \delta) \geqslant F_n(x_0 + L + 0)$$

și

$$F_n(x_0 - \delta) \leqslant F_n(x_0 - 0).$$

Fie $\delta > 0$, suficient de mic și astfel ca $x_0 + L + \delta$ și $x_0 - \delta$ să fie puncte de continuitate ale lui F. Atunci pentru n suficient de mare

$$x_n + L + \frac{\delta}{2} < x_0 + L + \delta \text{ și } x_n - \frac{\delta}{2} > x_0 - \delta.$$

Deci, pentru n suficient de mare

$$F_n(x_0 + L + \delta) - F_n(x_0 - \delta) \geqslant F_n(x_n + L + 0) - F_n(x_n - 0).$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obținem

$$F_0(x_0 + L + \delta) - F_0(x_0 - \delta) \geqslant \lim_{n \to \infty} Q_n(L).$$

Luînd limita pentru $\delta \to 0$, obținem

$$Q_0(L) \geqslant F_0(x_0 + L + 0) - F_0(x_0 - 0) \geqslant \lim_{n \to \infty} Q_n(L).$$

Deoarece, întotdeauna, $Q_0(L) \leqslant \lim_n Q_n(L)$ rezultă că

$$Q_0(L) = \lim_n Q_n(L).$$

VALORI MEDII. MOMENTE

1. *Variabila aleatoare* ξ *are repartiția*

$$\xi : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze valorile medii

$M(\xi)$, $M(2\xi)$, $M(\xi + 1)$, $M(2\xi + 1)$, $M(\xi^2)$ și $M[(\xi - 0{,}3)^2]$.

SOLUȚIE. În cazul unei variabile aleatoare discrete, avem

$$M(\xi) = \sum x_i p(\xi = x_i) = -1 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}3.$$

Variabila aleatoare 2ξ are repartiția

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $P(2\xi = -2)$ este același lucru cu $P(\xi = -1)$.

$$M(2\xi) = -2 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}5 = 0{,}6.$$

Această valoare medie se poate calcula imediat, știind că

$$M(2\xi) = 2M(\xi).$$

Avem

$$M(\xi + 1) = (-1 + 1) \times 0{,}2 + (0 + 1) \times 0{,}3 + (1 + 1) \times 0{,}5 = 1{,}3$$

de unde

$$M(\xi + 1) = M(\xi) + 1,$$

adică adunînd variabilei o constantă, media crește cu această constantă

$$M(2\xi + 1) = (-2+1) \times 0{,}2 + (0 + 1) \times 0{,}3 + (2 + 1) \times 0{,}5 = 1{,}6$$

sau

$$M(2\xi + 1) = 2M(\xi) + 1,$$

$$M(\xi^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 0^2 \times 0{,}3 + 1^2 \times 0{,}5 = 0{,}7$$

de unde rezultă că, media pătratului unei variabile nu este egală cu pătratul mediei.

$$M[(\xi-0{,}3)^2] = (-1{,}3)^2 \times 0{,}2 + (-0{,}3)^2 \times 0{,}3 + (0{,}7)^2 \times 0{,}5 = 0{,}61.$$

2. *Variabilele aleatoare* ξ *și* η *au repartițiile*

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

și respectiv

$$\eta : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Se cere:

a) *să se afle dispersiile variabilelor* ξ *și* η;

b) *să se calculeze corelația celor două variabile*;

c) *să se calculeze coeficientul de corelație*:

d) *să se afle dispersia variabilei* $\xi + \eta$.

SOLUȚIE. a) Calculăm mai întîi valorile medii ale celor două variabile

$$M(\xi) = \sum_i x_i P(\xi = x_i) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{5}{10} - 1 \cdot \frac{1}{10} - 1 \cdot \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2,$$

$$M(\eta) = \sum_i y_i P(\eta = y_i) = 1 \cdot \frac{1}{10} - 1 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} - 1 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{6}{10} = -0{,}6$$

de unde rezultă

$$D^2(\xi) = 0{,}96 \text{ și } D^2(\eta) = 0{,}64.$$

b) Ținînd seama de valorile obținute pentru $M(\xi)$ și $M(\eta)$, obținem.

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0{,}1\,(1)\,(1) + 0{,}5\,(1)\,(-1) + 0{,}1\,(-1)\,(1) + 0{,}3\,(-1)\,(-1) - (0{,}2)\,(-0{,}6) = -0{,}08.$$

c) Prin definiție coeficientul de corelație ρ are expresia

$$\rho_{(\xi, \eta)} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)\, D(\eta)} = \frac{-0{,}08}{0{,}784} = -0{,}10.$$

d) Dispersia unei sume de două variabile aleatoare este dată de expresia

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta)$$

sau ținînd seama de valorile obținute la punctele anterioare

$$D^2(\xi + \eta) = 0{,}96 + 0{,}64 + 2\,(-0{,}08) = 1{,}44.$$

3. *Variabila aleatoare* ξ *are repartiția*

$$\xi : \begin{pmatrix} 2025 & 2050 & 2075 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Să se găsească dispersia variabilei ξ : $D^2(\xi)$.

SOLUȚIE. Scădem 2 050 din fiecare valoare a lui ξ și rezultatul îl împărțim prin 25. Noua variabilă este

$$\eta = \frac{\xi - 2050}{25} \tag{1}$$

și are repartiția

$$\eta : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Calculăm valoarea medie și dispersia pentru variabila η

$$M(\eta) = -1 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}2,$$

$$M(\eta^2) = (-1)^2 \times 0{,}3 + 0^2 \times 0{,}2 + 1^2 \times 0{,}5 = 0{,}8.$$

Avem

$$D^2(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta)$$

$$= 0{,}8 - 0{,}04 = 0{,}76.$$

Din (1) se vede că

$$\xi = 25\eta + 2050.$$

de unde

$$D^2(\xi) = D^2(25\,\eta + 2050) =$$

$$= D^2(25\eta) = 625\ D^2(\eta),$$

sau

$$D^2(\xi) = 625 \times 0{,}76 = 475.$$

4. *Funcția de probabilitate compusă a variabilelor* ξ *și* η *este dată de tabloul*

		y		
		-1	1	$P(\xi = x)$
x	-2	0,4	0,1	0,5
	2	0,1	0,4	0,5
$P(\eta = y)$		0,5	0,5	1

Se cere:

a) *să se afle dispersiile variabilelor* ξ *și* η;

b) *să se calculeze corelația celor două variabile*;

c) *să se afle dispersia variabilei* $\xi + \eta$.

SOLUȚIE. a) Pentru calculul dispersiilor, avem

$$m_1 = m_2 = 0$$

și

$$D^2(\xi) = M(\xi - m_1)^2 = M(\xi^2) = 0{,}5\,(2)^2 + 0{,}5\,(-2)^2 = 4,$$

$$D^2(\eta) = M(\eta - m_2)^2 = M(\eta^2) = 0{,}5\,(1)^2 + 0{,}5\,(-1)^2 = 1.$$

b) Prin definiție corelația a două variabile are expresia

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M[(\xi - m_1)(\eta - m_2)] = M(\xi\eta) - m_1 m_2 = M(\xi\eta).$$

Ținînd seama de valorile pe care le iau variabilele ξ și η obținem

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0{,}4 \cdot 2 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 2\,(-1) + 0{,}1(-2) \cdot 1 + 0{,}4\,(-2)\,(-1) = 1{,}2.$$

c) Dispersia unei sume de două variabile aleatoare este dată de expresia

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

Înlocuind în expresia de mai înainte valorile calculate la punctele anterioare, se obține

$$D^2(\xi + \eta) = 7{,}4$$

5. *Fie ξ și η două variabile aleatoare, pentru care:*

$$M(\xi) = -2,\ M(\eta) = 4$$

$$D^2(\xi) = 4,\ D^2(\eta) = 9$$

iar coeficientul de corelație $\rho(\xi, \eta) = -0{,}5$.

Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare

$$\beta = 3\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 - 3$$

SOLUȚIE: Avem . . .

$$M(\beta) = 3M(\xi^2) - 2M(\xi\eta) + M(\eta^2) - 3.$$

Pentru a calcula valoarea medie a variabilei β, vom calcula mai întîi:

$$M(\xi^2),\ M(\xi\eta) \text{ și } M(\eta^2).$$

Din

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi),$$

rezultă

$$M(\xi^2) = D^2(\xi) + M^2(\xi) = 8.$$

În mod analog

$$M(\eta^2) = D^2(\eta) + M^2(\eta) = 25.$$

Prin definiție :

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta),$$

de unde

$$M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta) + \operatorname{cov}(\xi, \eta) =$$
$$= M(\xi)M(\eta) + \rho(\xi, \eta)D(\xi)D(\eta) = -11.$$

Rezultă că

$$M(\beta) = 3 \cdot 8 - 2(-11) + 25 - 3 = 68.$$

6. *Sistemul de variabile aleatoare* ξ, η, β *este caracterizat de valorile medii*

$$M(\xi) = -4\,;\ M(\eta) = 1\,;\ M(\beta) = 1$$

și de matricea de corelație

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 3 & 1 \\ & & 4 \end{Vmatrix}.$$

Se cere să se calculeze valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare

$$\theta = 3\beta + 2\xi - \eta - 4$$

SOLUȚIE. Deoarece θ este o funcție liniară, din

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i M(\xi_i) + b,$$

rezultă că

$$M(\theta) = 3M(\beta) + 2M(\xi) - M(\eta) - 4 = -10.$$

Din

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D^2(\xi_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

unde $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$ este corelația variabilelor ξ_i și ξ_j, rezultă că

$$D^2(\theta) = 3^2 D^2(\beta) + 2^2 D^2(\xi) + 1^2 D^2(\eta) +$$
$$2[3 \cdot 2 \operatorname{cov}(\beta, \xi) + 3(-1)\operatorname{cov}(\beta, \eta) + 2(-1)\operatorname{cov}(\xi, \eta)] =$$
$$= 9 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2[6(-1) + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 1] = 25.$$

7. *O urnă conține* 31 *bile albe și* 19 *negre. O persoană scoate bilele una cîte una, pînă cînd obține* 14 *bile albe. Să se determine valoarea medie a numărului de bile negre extrase.*

SOLUȚIE. Din enunț rezultă că bila extrasă nu se mai pune la loc în urnă.

Probabilitatea ca să extragă 14 bile albe și k negre este

$$P_k = \frac{C_{31}^{14} C_{19}^{k}}{C_{50}^{14+k}} \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 19.$$

Atunci valoarea medie a numărului de bile negre extrase va fi

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{19} k \cdot \frac{C_{31}^{14} \cdot C_{19}^{k}}{C_{50}^{14+k}} = C_{31}^{14} \sum_{k=0}^{19} k \cdot \frac{C_{19}^{k}}{C_{50}^{14+k}}.$$

8. *Fie A și B două evenimente, astfel încît*

$$P(A) = \frac{1}{4};\ \ P_A(B) = \frac{1}{2},\ P_B(A) = \frac{1}{4}.$$

Definim variabilele ξ și η : $\xi = 1$ sau $\xi = 0$ după cum se realizează sau nu evenimentul A ; $\eta = 1$ sau $\eta = 0$ după cum se realizează sau nu evenimentul B.

Să se calculeze $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D^2(\xi)$, $D^2(\eta)$, și $\rho(\xi, \eta)$.

SOLUȚIE. Ținînd seama de definiția valorii medii, obținem

$$M(\xi) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) = \frac{1}{4},$$

$$M(\eta) = 1 \cdot P(B) + 0 \cdot P(B^c) = P(B).$$

Se observă că

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Atunci

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că

$$M(\eta) = \frac{1}{2}.$$

Prin definiție

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

$$D^2(\eta) = M_2(\eta) - M^2(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Variabilele ξ și η au repartițiile

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}; \quad \eta : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de unde

$$\xi \cdot \eta : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$M(\xi \cdot \eta) = \frac{1}{8}.$$

Fie $\rho(\xi, \eta)$ coeficientul de corelație ale variabilelor ξ și η

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) M(\eta)}{D(\xi) D(\eta)}.$$

Deoarece $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) M(\eta) = \frac{1}{8}$, rezultă că

$$\rho(\xi, \eta) = 0.$$

9. *Se dă*

a) $P(\xi_1 = x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{2}{3} & \text{dacă } x = 1, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri} \end{cases}$

b) $P(\xi_2 = x) = \begin{cases} C_6^x \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{6-x}, & \text{pentru } x = 0, 1, \ldots, 6, \\ 0 \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$

c) $P(\xi_3 = x) = \begin{cases} \frac{C_8^x C_4^{6-x}}{C_{12}^6}, & \text{pentru } x = 0, 1, \ldots, 6, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$

Să se calculeze valoarea m edie, momentul de ordinul al doilea și dispersia

SOLUȚIE. a) Variabila aleatoare ξ_1 este discretă. Atunci

$$M(\xi_1) = \sum_{i=0}^{1} p_i x_i = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3},$$

$$M_2(\xi_1) = \sum_{i=0}^{1} p_i x_i^2 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Prin definiție

$$D^2(\xi_1) = M_2(\xi_1) - M^2(\xi_1) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9},$$

b) În acest caz, avem

$$M(\xi_2) = \sum_{i=0}^{6} p_i x_i = \sum_{j=0}^{6} j C_6^j \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{6-j} = 4,$$

$$M_2(\xi_2) = \sum_{i=0}^{6} p_i x_i^2 = \sum_{j=0}^{6} j^2 C_6^j \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{6-j} = \frac{52}{3}.$$

Atunci

$$D^2(\xi_2) = M_2(\xi_2) - M^2(\xi_2) = \frac{52}{3} - 16 = \frac{4}{3}.$$

c) După un calcul analog cu cel precedent, obținem

$$M(\xi_3) = 4;\ M_2(\xi_3) = \frac{52}{11};\ D^2(\xi_3) = \frac{8}{11}.$$

10. *Se aruncă două zaruri și notăm cu c_{ij} evenimentul care constă în faptul că pe primul zar apar i puncte iar pe al doilea j puncte, $1 \leqslant i, j \leqslant 6$. Asociind evenimentului c_{ij}, variabila aleatoare $\xi = i + j$, să se calculeze:*

a) $F(4)$;

b) $M(\xi)$;

c) $D^2(\xi)$.

SOLUȚIE. a) Prin definiție avem

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Atunci

$$F(4) = P(\xi < 4) = \sum_{k=2}^{3} P(\xi = k) = \frac{3}{36}.$$

b) $M(\xi) = \sum_{i,j} \frac{i+j}{36} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{6} (i+j) \right) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} (6i+21) = \frac{252}{36} = 7.$

c) $D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi),$

$$M(\xi^2) = \sum_{i,j=1}^{6} \frac{(i+j)^2}{36} = \frac{1}{36} \sum_{i,j=1}^{6} (i^2 + 2ij + j^2) = \frac{329}{6},$$

$$D^2(\xi) = \frac{287}{6}.$$

11. *Variabila aleatoare ξ poate lua toate valorile întregi pozitive cu probabilități descrescînd în progresie geometrică.*

Se cere să se determine rația q a progresiei, astfel încît $M(\xi) = 10$ și să se calculeze pentru această condiție probabilitatea $P_{10} = P(\omega : \xi(\omega) \leqslant 10)$, și probabilitatea $P_{100} = P(\omega : \xi(\omega) \leqslant 100)$.

SOLUȚIE. Aplicînd definiția valorii medii și ținînd cont de condiția impusă avem următoarele relații :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = 10 ; \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Dar $p_k = p_1 q^{k-1}$ pentru că probabilitățile sînt în progresie geometrică. Urmează că

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p_1 \frac{1}{1-q}.$$

Deci

$$p_1 = 1 - q.$$

Mai departe avem

$$(1-q) \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = 10$$

sau

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k q^k = 10.$$

Urmează că avem

$$\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} = 10,$$

adică

$$q = \frac{9}{10} = 0{,}9 ; \; p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Urmează că

$$P_{10} = P(\omega : \xi(\omega) \leqslant 10) = \sum_{k=1}^{10} p_k = 0{,}1 \sum_{k=1}^{10} (0{,}9)^{k-1} = 0{,}1 \frac{1-(0{,}9)^{10}}{1-0{,}9}.$$

Deci

$$P_{10} = 1 - (0{,}9)^{10} \simeq 0{,}652.$$

Analog găsim

$$P_{100} = P(\omega : \xi(\omega) \leqslant 100) = 1 - (0{,}9)^{100} \simeq 0{,}9999737,$$

12. *Variabila aleatoare ξ poate lua valoarea zero cu probabilitatea p_0 și orice valoare pozitivă întreagă $n > 0$ cu probabilitatea p_n, descrescînd în progresie geometrică. Se cere să se determine probabilitățile p_n, $n \geqslant 0$ cînd se cunoaște $M(\xi) = a$, $M(\xi^2) = b$, și să se stabilească condiția, pe care trebuie s-o îndeplinească a și b, pentru ca problema să fie posibilă. Să se verifice dacă sînt aplicabile valorile $a = 4$, $b = 25$.*

SOLUȚIE. Ținînd seama că p_n cu $n \geqslant 0$ sînt probabilități și de $M(\xi) = a$, $M(\xi^2) = b$ găsim următoarele relații :

$$p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = a,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = b.$$

Dacă acum punem condiția ca p_n, $n \geqslant 1$ să fie în progresie geometrică, relațiile de mai înainte le mai putem scrie și astfel :

$$p_0 + p_1 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1,$$

$$p_1 \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = a,$$

$$p_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = b.$$

Cum

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Obținem în definitiv următoarele ecuații

$$p_0 + p_1 \frac{1}{1-q} = 1,$$

$$p_1 \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = a,$$

$$p_1 \left(\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right) = b.$$

De aici urmează

$$p_1 = a(1-q)^2$$

și mai departe

$$a(1-q)^2 \left(\frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right) = b$$

și deci

$$q = \frac{b-a}{b+a}.$$

Mai departe

$$p_0 = 1 - p_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 1 - \frac{2a^2}{b+a}$$

iar

$$p_1 = \frac{4a^3}{(b+a)^2},$$

$$p_n = p_1 q^{n-1} = \frac{4a^3}{b^2-a^2} \left(\frac{b-a}{b+a} \right)^n.$$

Pentru ca problema să fie posibilă este necesar și suficient ca

$$b + a \geqslant 2a^2 \text{ și } b \geqslant a,$$

dat fiind că p_n cu $n \geqslant 0$ sînt probabilități.

Valorile $a = 4$, $b = 25$ nu sînt admisibile întrucît nu este verificată inegalitatea $b + a \geqslant 2a^2$.

Într-adevăr $4 + 25 < 2 \cdot 4^2$.

Dacă $a = 4$ atunci $b \geqslant 28$.

În cazul $a = 4$, $b = 28$ avem

$$p_0 = 0\,; \; p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

13. *Variabila aleatoare* ξ *ia valori întregi nenegative* $n \geqslant 0$ *cu probabilitățile* $p_n = P(\omega : \xi(\omega) = n) = A\frac{k^n}{n!}$.

Să se determine A *și* k, *dacă se știe că* $M(\xi) = a$ *și să se găsească valoarea cea mai probabilă* μ, *a numărului* n.

SOLUȚIE. Punem condițiile că p_n, $n \geqslant 0$ sînt probabilități și $M(\xi) = a$. Avem în acest caz relațiile

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_n = A \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{k^n}{n!} = Ak \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} = a$$

care sînt echivalente cu

$$Ae^k = 1$$

$$kAe^k = a.$$

Rezultă imediat că

$$k = a; \quad A = e^{-a}.$$

Din faptul că

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{a}{n+1},$$

deducem că $\mu = [a]$, dacă a nu este număr întreg, iar în cazul în care a este un număr întreg, vom avea două valori cele mai probabile și anume a și $a - 1$.

14. *Probabilitatea apariției evenimentului* A *în experiența* i *este egală cu* p_i. *Fie* μ *numărul de apariții a evenimentului* A *în primele* n *experiențe independente.*

Se cere:

$$\text{a) } M(\mu)\text{; b) } D^2(\mu)\text{; c) } M\left(\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)^3\right).$$

SOLUȚIE. Fiecărei experiențe îi atașăm o variabilă aleatoare ξ_k ce poate lua două valori 1 sau 0, după cum se realizează sau nu evenimentul A în experiența k

$$\xi_k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_k & q_k \end{pmatrix}, \quad p_k + q_k = 1.$$

Atunci, $\zeta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ va da numărul μ de apariții al evenimentului A în primele n experiențe.

a) Din definiția valorii medii

$$M(\mu) = M(\zeta) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i),$$

de unde

$$M(\mu) = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

b) Avem

$$D^2(\mu) = D^2(\zeta) = M(\zeta^2) - M^2(\zeta) = M\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)^2\right] - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k^2) + 2\sum_{k<l} M(\xi_k)\, M(\xi_l) - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k + 2\sum_{k<l} p_k p_l - \sum_{k=1}^{n} p_k^2 - 2\sum_{k<l} p_k p_l,$$

de unde

$$D^2(\mu) = \sum_{k=1}^{n} p_k (1 - p_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k.$$

c) $$M\left[\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)^3\right] = M\left[\mu^3 - 3\mu^2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) + 3\mu\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^3\right] =$$

$$= M(\zeta^3) - 3\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) M(\zeta^2) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 M(\zeta) - \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Însă

$$M(\zeta^3) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^3 + 3\sum_{i\neq j} \xi_i^2 \xi_j + 6\sum_{i\neq j\neq k} \xi_i \xi_j \xi_k\right),$$

$$M(\zeta^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + 2\sum_{i\neq j} p_i p_j,$$

de unde

$$M\left[\left(\mu - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)^3\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i (q_i - p_i).$$

15. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare care ia valorile* $x = 0, 1, \ldots, n$ *cu probabilitățile*

$$p(x) = \frac{C_{N_p}^{x} C_{N_q}^{n-x}}{C_N^n}$$

(*repartiția hipergeometrică*). *Se cere să se calculeze valoarea medie și dispersia.*

SOLUȚIE. Avem

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} kp(k) = \frac{1}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k} =$$

$$= \frac{Np}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k},$$

unde $a = Np$, $b = Nq$. Dacă punem $j = k - 1$, se știe că

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_{a-1}^{j} C_b^{n-1-j} = C_{a+b-1}^{n-1} = C_{N-1}^{n-1}.$$

Prin urmare

$$M(\xi) = Np \frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = np.$$

Să calculăm acum momentul de ordinul al doilea. Avem

$$M[\xi(\xi - 1)] + M(\xi) = M_2(\xi) = M(\xi^2).$$

Deci

$$C_N^n M(\xi(\xi - 1)) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_a^k C_b^{n-k} = a(a-1) \sum_{k=2}^{n} C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} =$$

$$= a(a-1) C_{a+b-2}^{n-2} = Np(Np-1) C_{N-2}^{n-2}$$

de unde

$$M(\xi^2) = np(Np-1) \cdot \frac{n-1}{N-1} + np = \frac{np}{N-1} [Np(n-1) + N - n].$$

Cum

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi),$$

obținem

$$D^2(\xi) = \frac{np}{N-1} [N - n + pN(n-1) - pn(N-1)] = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

16. *Variabilele aleatoare* ξ *și* η *pot lua valorile întregi nenegative* x_1 *și* x_2 *cu probabilitatea*

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} \cdot p^{x_1} \cdot q^{x_2} \cdot (1 - p - q)^{n - x_1 - x_2}.$$

Să se găsească valoarea medie, dispersia și corelația variabilelor ξ *și* η.

SOLUȚIE. Avem identitatea

$$(p + q + r)^n = \sum_{x_1 + x_2 + x_3 = n} \sum \sum \frac{n!}{x_1! x_2! x_3!} p^{x_1} q^{x_2} r^{x_3}.$$

SOLUȚIE. Avem

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} kp(k) = \frac{1}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k} =$$

$$= \frac{Np}{C_N^n} \sum_{k=1}^{n} C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k},$$

unde $a = Np$, $b = Nq$. Dacă punem $j = k - 1$, se știe că

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_{a-1}^{j} C_b^{n-1-j} = C_{a+b-1}^{n-1} = C_{N-1}^{n-1}.$$

Prin urmare

$$M(\xi) = Np \frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = np.$$

Să calculăm acum momentul de ordinul al doilea. Avem

$$M[\xi(\xi - 1)] + M(\xi) = M_2(\xi) = M(\xi^2).$$

Deci

$$C_N^n M(\xi(\xi - 1)) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_a^k C_b^{n-k} = a(a-1) \sum_{k=2}^{n} C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} =$$

$$= a(a-1) C_{a+b-2}^{n-2} = Np(Np-1) C_{N-2}^{n-2}$$

de unde

$$M(\xi^2) = np(Np-1) \cdot \frac{n-1}{N-1} + np = \frac{np}{N-1} [Np(n-1) + N - n].$$

Cum

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi),$$

obținem

$$D^2(\xi) = \frac{np}{N-1} [N - n + pN(n-1) - pn(N-1)] = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

16. *Variabilele aleatoare ξ și η pot lua valorile întregi nenegative x_1 și x_2 cu probabilitatea*

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} \cdot p^{x_1} \cdot q^{x_2} \cdot (1 - p - q)^{n - x_1 - x_2}.$$

Să se găsească valoarea medie, dispersia și corelația variabilelor ξ și η.

SOLUȚIE. Avem identitatea

$$(p + q + r)^n = \sum_{x_1 + x_2 + x_3 = n} \sum \sum \frac{n!}{x_1! x_2! x_3!} p^{x_1} q^{x_2} r^{x_3}.$$

Diferențiind și înmulțind cu p avem

$$n(p+q+r)^{n-1}p = \sum\sum\sum \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\, x_1 p^{x_1} q^{x_2} r^{x_3} \tag{1}$$

sau mai departe

$$n(n-1)(p+q+r)^{n-2}p^2 + n(p+q+r)^{n-1}p =$$

$$= \sum\sum\sum \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\, x_1^2 p^{x_1} q^{x_2} r^{x_3}, \tag{2}$$

$$n(n-1)(p+q+r)^{n-2}pq = \sum\sum\sum \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\, x_1 \cdot x_2 p^{x_1} q^{x_2} \cdot r^{x_3}. \tag{3}$$

Punînd, $p+q+r=1$ din relația (1) se obține

$$M(\xi) = \sum_{x_1, x_2, x_3} x_1 \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\, p^{x_1} q^{x_2} r^{x_3} = np,$$

deci

$$M(\xi) = np.$$

În mod analog, din relația (2) rezultă

$$M(\xi^2) = n(n-1)p^2 + np.$$

Cum

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi),$$

avem

$$D^2(\xi) = np(1-p).$$

Din (3), obținem

$$M(\xi, \eta) = n(n-1)pq.$$

Folosind același procedeu se obține

$$M(\eta) = nq, \quad M(\eta^2) = n(n-1)q^2 + nq,$$

de unde

$$D^2(\eta) = nq(1-q).$$

Prin definiție

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi)M(\eta) = -npq.$$

17. *Variabila aleatoare ξ ia valori întregi și pozitive cu probabilitățile*

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, \quad a > 0.$$

Se cere să se afle

$$M(\xi) \text{ și } D^2(\xi).$$

SOLUȚIE. Prin definiție

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1}$$

de unde

$$M(\xi) = \frac{1}{a} \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{1+a}\right)^2} = a,$$

deoarece $a > 0$ și $\frac{a}{1+a} < 1$.

Rezultă că

$$M(\xi) = a.$$

Pentru determinarea dispersiei calculăm mai întîi momentul de ordinul al doilea. Avem

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1},$$

de unde

$$M(\xi^2) = \frac{1}{a} \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 (1+a)^2 (1+2a) = a(2a+1).$$

Urmează că

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = a(a+1)$$

18. *Fie ξ o variabilă aleatoare, care ia valori întregi nenegative, cu probabilitățile*

$$P(\xi = n) = e^{-\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda})^{n-1}.$$

Se cere să se calculeze valoarea medie și dispersia.

SOLUȚIE. Prin definiție avem

$$M(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n (1 - e^{-\lambda})^{n-1}.$$

Să observăm că, notînd $1 - e^{-\lambda} = z$, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (1 - e^{-\lambda})^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$$

Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z + z^2 + \cdots) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{z}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

Deci

$$M(\xi) = e^{-\lambda} \frac{1}{e^{-2\lambda}} = e^{\lambda}.$$

Pentru calculul momentului de ordinul al doilea, avem

$$M_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1 - e^{-\lambda})^{n-1}.$$

Însă

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = 1 + 4z + 9z^2 + \cdots =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z(1 + 2z + \cdots) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z}{1-z} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)^2 + (1-z)z}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Deci

$$M_2(\xi) = \frac{e^{-\lambda}(2 - e^{-\lambda})}{e^{-3\lambda}} = e^{2\lambda}(2 - e^{-\lambda}).$$

Dispersia se calculează imediat, întrucît

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi).$$

19. *Variabila aleatoare* ξ *poate lua orice valori întregi* $n \geqslant 0$ *cu probabilitățile*

$$p_n = P(\omega : \xi(\omega) = n) = \frac{k}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) *Să se calculeze* p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *știind că* $M(\xi) = A$.
b) *Să se arate că* $M(\xi^{\alpha})$, $\alpha = 2, 3, \ldots$ *nu are sens.*
SOLUȚIE. a) Din condiția

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

deducem

$$k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)} = 1$$

deci

$$k = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)}}.$$

Întrucît

$$\frac{1}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{2}{a+n+1} + \frac{1}{a+n+2}\right)$$

rezultă că avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \frac{k}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n} - \frac{2}{a+n+1} + \frac{1}{a+n+2}\right) = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) = 1.$$

Urmează că avem

$$k = 2a(a+1).$$

Pentru determinarea celuilalt parametru rămas punem condiția

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{2a(a+1)}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)} = A,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{2a(a+1)}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)} = 2a(a+1)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n+1)\,(a+n+2)} - a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)}\right] =$$

$$= 2a(a+1)\left[\frac{1}{a+2} - \frac{a}{2a(a+1)}\right] = \frac{a^2}{a+2}.$$

Din condiția

$$M(\xi) = \frac{a^2}{a+2} = A,$$

am determinat astfel și constanta a care înlocuită în

$$p_n = P(\xi = n) = \frac{2a(a+1)}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)};\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ne dau efectiv probabilitățile p_n.

b) Prin definiție

$$M(\xi^{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}\,\frac{2a(a+1)}{(a+n)\,(a+n+1)\,(a+n+2)}$$

și se vede că pentru $\alpha \geqslant 2$ seria este divergentă, deci nu există $M_{\alpha}(\xi)$ cu $\alpha \geqslant 2$.

20. *O urnă conține bile numerotate de la 1 la N. Fie* ξ *cel mai mare număr obținut în urma a n extracții succesive efectuate cu întoarcerea bilei extrase. Se cere:*

a) *să se calculeze* $p_k = P(\xi = k)$;

b) $M(\xi)$;

SOLUȚIE. a) Vom calcula mai întîi $P(\xi \leqslant k)$.

Dar, evenimentul $\{\xi \leqslant k\}$ înseamnă că la fiecare extracție numărul bilei nu depășește valoarea k. Cum bila este pusă de fiecare dată la loc înseamnă că extracțiile efectuate în număr de n sînt independente și deoarece pentru fiecare extracție probabilitatea că numărul de bile să fie mai mic sau egal cu k este $\frac{k}{N}$, urmează că

$$P(\xi \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n,$$

de unde

$$p_k = P(\xi = k) = P((\xi \leqslant k) - (\xi \leqslant k-1)) =$$

$$= P(\xi \leqslant k) - P(\xi \leqslant k-1) = (k^n - (k-1)^n)\frac{1}{N^n}.$$

b) Din definiția valorii medii rezultă

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{N} k p_k = \frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N} k[k^n - (k-1)^n] =$$

$$= \frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}[k^{n+1} - (k-1)^{n+1} - (k-1)^n] = N - \frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}(k-1)^n.$$

Observație. Dacă N este suficient de mare, atunci $\frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}(k-1)^n$ va putea fi aproximată prin aria cuprinsă între axa ox, curba $y = x^n$ și dreptele $x = 0$ și $x = N$, împărțită la N^n. Urmează deci că

$M(\xi) \simeq \frac{n}{n+1} N$ care rezultă printr-un calcul simplu.

21. *Într-o urnă sînt a bile albe și b bile negre. Se extrag pe rînd r bile fără a se pune la loc bila extrasă. Fie* ξ *numărul de bile albe extrase. Se cere să se afle*

$$M(\xi) \text{ și } D^2(\xi).$$

SOLUȚIE. Se știe că

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{C_a^k C_b^{r-k}}{C_{a+b}^r}.$$

Să introducem variabilele aleatoare ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$ definite în felul următor:

$$\xi_j = \begin{cases} 1 \text{ dacă cea de a } j \text{ bilă extrasă este albă.} \\ 0 \text{ dacă cea de a } j \text{ bilă extrasă este neagră.} \end{cases}$$

Variabilele aleatoare ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant r$ sînt dependente și

$$\xi = \sum_{j=1}^{r} \xi_j.$$

Acum

$$M(\xi_j) = \frac{a}{a+b}; \quad D^2(\xi_j) = \frac{ab}{(a+b)^2}$$

după cum se constată ușor.

Considerăm acum pentru $j \neq k$ variabila aleatoare produs $\xi_j \xi_k$. Atunci

$$\xi_j \xi_k = \begin{cases} 1 \text{ dacă la a } j \text{ și a } k \text{ extracție a ieșit bila albă,} \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

Urmează imediat că

$$P(\xi_j \xi_k = 1) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$P(\xi_j \xi_k = 0) = 1 - \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}, \quad j \neq k.$$

Deducem acum că

$$M(\xi_j \xi_k) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}, \quad j \neq k.$$

Prin urmare

$$\operatorname{cov}(\xi_j, \xi_k) = M(\xi_j \cdot \xi_k) - M(\xi_j) M(\xi_k) =$$

$$= \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{-ab}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

Putem acum să calculăm $M(\xi)$ și $D^2(\xi)$ și anume

$$M(\xi) = \sum_{j=1}^{r} M(\xi_j) = \frac{ra}{a+b},$$

$$D^2(\xi) = D^2\left(\sum_{j=1}^{r} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{r} D^2(\xi_j) + 2 \sum_{\substack{j<k \\ j,k=1}}^{r} \operatorname{cov}(\xi_j, \xi_k) =$$

$$= \frac{rab}{(a+b)^2} + 2C_r^2 \frac{-ab}{(a+b)^2(a+b-1)} = \frac{rab}{(a+b)^2}\left\{1 - \frac{r-1}{a+b-1}\right\}.$$

22. *Se aruncă două zaruri și notăm cu* ξ *variabila aleatoare care indică numărul de puncte pe primul zar iar cu* η *maximul de puncte obținute pe unul din zaruri:*

a) *să se scrie repartiția vectorului aleator* (ξ, η);

b) *să se calculeze* $M(\xi)$, $D^2(\xi)$, $M(\eta)$, $D^2(\eta)$, $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$.

SOLUȚIE. a) Se vede imediat că variabilele aleatoare ξ și η au respectiv repartițiile

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\eta : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Atunci repartiția vectorului (ξ, η) este dată de tabloul următor:

ξ \ η	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

b) Din definiția valorii medii rezultă

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} = \frac{7}{2}; \qquad M(\xi^2) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{6} = \frac{91}{6}$$

Urmează atunci că

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{35}{12},$$

$$M(\eta) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36},$$

$$M(\eta^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4\,\frac{3}{36} + 9\,\frac{5}{36} + 16\,\frac{7}{36} + 25\,\frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36}.$$

Urmează atunci

$$D^2(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = \frac{2555}{1296}.$$

În mod analog rezultă că

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{105}{72}.$$

23. *Se consideră trei bile de culori diferite care se repartizează la întîmplare în trei urne:*

1) *să se scrie mulțimea evenimentelor elementare;*
2) *să se indice evenimentul A: „există urne care conțin cel puțin două bile";*
3) *să se indice evenimentul B: „prima urnă nu este goală";*
4) *să se indice evenimentul: „s-a realizat și A și B";*
5) *să se indice evenimentul: „s-a realizat sau A sau B, sau în același timp și A și B";*
6) *să se indice evenimentul complementar lui A;*
7) *să se exprime în cuvinte evenimentul imposibil.*

SOLUȚIE. 1) Dacă notăm pentru a le distinge, cele trei bile prin literele a, b, c, avem următorul tablou al evenimentelor elementare:

1. $\{abc\|-\|-\}$	10. $\{a\|bc\|-\}$	19. $\{-\|a\|bc\}$
2. $\{-\|abc\|-\}$	11. $\{b\|ac\|-\}$	20. $\{-\|b\|ac\}$
3. $\{-\|-\|abc\}$	12. $\{c\|ab\|-\}$	21. $\{-\|c\|ab\}$
4. $\{ab\|c\|-\}$	13. $\{a\|-\|bc\}$	22. $\{a\|b\|c\}$
5. $\{ac\|b\|-\}$	14. $\{b\|-\|ac\}$	23. $\{a\|c\|b\}$
6. $\{bc\|a\|-\}$	15. $\{c\|-\|bc\}$	24. $\{b\|a\|c\}$
7. $\{ab\|-\|c\}$	16. $\{-\|ab\|c\}$	25. $\{b\|c\|a\}$
8. $\{ac\|-\|b\}$	17. $\{-\|ac\|b\}$	26. $\{c\|a\|b\}$
9. $\{bc\|-\|a\}$	18. $\{-\|bc\|a\}$	27. $\{c\|b\|a\}$

2. Evenimentul A: „ există urne care conțin cel puțin două bile" este dat de mulțimea evenimentelor elementare notate cu 1—21.

3) Evenimentul B: „prima urnă nu este goală" este dat de mulțimea evenimentelor elementare notate cu 1, 4—15 și 22—27.

4) Evenimentul „și A și B" este dat de mulțimea evenimentelor elementare notate cu 1, 4—15.

5) Evenimentul „sau A sau B sau în același timp și A și B" coincide cu mulțimea tuturor evenimentelor elementare, adică tot spațiul.

6) Evenimentul complementar lui A este dat de mulțimea evenimentelor elementare notate cu 22—27.

7) Evenimentul imposibil va putea fi de exemplu exprimat prin: „prima urnă este goală și nu sînt urne care conțin mai mult de o bilă".

24. *Să atribuim fiecărui eveniment elementar notat cu* 1—27 *în problema* 23, *probabilitatea* $\frac{1}{27}$ *şi să introducem următoarele variabile aleatoare*:

ξ *numărul urnelor ocupate*;

η_i, $i = 1, 2, 3$ *numărul de bile în urna* i.

Se cere:

a) *să se determine repartiţiile comune* (ξ, η_1) şi (η_1, η_2);

b) $M(\xi)$, $M(\eta_i)$, $M(\xi^2)$, $M(\eta_i^2)$, $M(\xi\eta_1)$, $M(\eta_1, \eta_2)$, $D^2(\xi)$, $D^2(\eta_i)$, cov (ξ, η_1), cov (η_1, η_2).

SOLUŢIE. a) Vom scrie repartiţia comună (ξ, η_1) sub forma tabelei următoare, unde se ţine seama de tabloul evenimentelor elementare din problema anterioară

		η_1 0	1	2	3	Repartiţia lui ξ
ξ	1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$
	2	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{3}$
	3	0	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
Repartiţia lui η_1		$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	

Repartiţia comună (η_1, η_2) este dată de tabela următoare după cum rezultă din problema 23

		η_1 0	1	2	3	Repartiţia lui η_2
η_2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
	2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
	3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
Repartiţia lui η_1		$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	

b) $M(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{19}{9}$,

$M(\eta_i) = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{27} = 1; \quad i = 1, 2, 3.$

$M(\xi^2) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot \frac{2}{9} = \frac{43}{9}$,

$M(\eta_i^2) = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} + 9 \cdot \frac{1}{27} = \frac{15}{9}; \quad i = 1, 2, 3,$

$M(\xi \cdot \eta_1) = 0 \cdot \frac{8}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} + 3 \cdot \frac{7}{27} + 4 \cdot \frac{6}{27} = \frac{19}{9}$,

$M(\eta_1 \cdot \eta_2) = 0 \cdot \frac{15}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} = \frac{2}{3}$,

$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{43}{9} - \frac{361}{81} = \frac{26}{81}$,

$D^2(\eta_i^2) = M(\eta_i^2) - M^2(\eta_i) = \frac{2}{3}; \quad i = 1, 2, 3,$

$\operatorname{cov}(\xi, \eta_1) = M(\xi \cdot \eta_1) - M(\xi) \cdot M(\eta_1) = 0,$

$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = M(\eta_1 \cdot \eta_2) - M(\eta_1) M(\eta_2) = -\frac{1}{3}.$

25. *În condițiile exercițiului* 24 *să se deducă repartiția variabilelor aleatoare* $\eta_1 + \eta_2$ *și* $\eta_1 \cdot \eta_2$.

SOLUȚIE. Se vede imediat din tabloul repartiției comune (η_1, η_2) că variabila aleatoare $\eta_1 + \eta_2$ poate lua valorile cu probabilitățile respective, așa cum se arată tabloul următor:

$$\eta_1 + \eta_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \end{pmatrix}.$$

Analog deducem pentru variabila aleatoare $\eta_1 \cdot \eta_2$:

$$\eta_1 \cdot \eta_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

26. *Într-o bibliotecă sînt* n *cărți ce sînt numerotate de la* 1 *la* n. *Se scot la întîmplare cărțile din bibliotecă. Avem o „întîlnire" dacă numărul de pe carte coincide cu numărul extracției. Să se calculeze media și dispersia numărului total de „întîlniri".*

SOLUȚIE. Se introduc n variabile aleatoare ζ_i ($i = 1, 2, .., n$), cîte una pentru fiecare carte. Dacă la extracția i cartea scoasă poartă pe ea numărul i, avem $\zeta_i = 1$, în rest $\zeta_i = 0$. Atunci numărul total de „întîlniri" este dat de

$$\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n.$$

Trebuie să găsim media și dispersia variabilei ξ. Pentru aceasta trebuie să găsim media și dispersia fiecărui ζ_i și covariația tuturor perechilor de ζ_i și ζ_j.

Pentru orice ζ_i, avem

$$M(\zeta_i) = 1 \cdot P(\zeta_i = 1) + 0 \cdot P(\zeta_i = 0) = P(\zeta_i = 1) = \frac{1}{n},$$

deoarece există o carte favorabilă printre cele n cărți.

Rezultă că

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} M(\zeta_i) = n\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Deoarece ζ_i are repartiția

$$\zeta_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

urmează că

$$D^2(\zeta_i) = M(\zeta_i^2) - M^2(\zeta_i) = 1^2\left(\frac{1}{n}\right) + 0^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}.$$

Prin definiție

$$\operatorname{cov}(\zeta_i, \zeta_j) = M(\zeta_i \zeta_j) - M(\zeta_i) \cdot M(\zeta_j).$$

Cum valorile posibile ale lui $\zeta_i \cdot \zeta_j$ sînt 0 și 1, rezultă

$$M(\zeta_i \cdot \zeta_j) = 1 \cdot P(\zeta_i \cdot \zeta_j = 1) + 0 \cdot P(\zeta_i \cdot \zeta_j = 0) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

deoarece $\zeta_i \zeta_j = 1$ dacă și numai dacă cărțile cu numerele i și j au fost extrase la rîndurile lor și sînt $(n-2)!$ permutări de cele $n-2$ cărți corespunzătoare acestui eveniment.

Dacă $i \neq j$

$$\operatorname{cov}(\zeta_i, \zeta_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Ținînd seama de rezultatele obținute, avem

$$D^2(\xi) = nD^2(\zeta_i) + n(n-1) \operatorname{cov}(\zeta_i, \zeta_j) = n\frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2(n-1)},$$

de unde

$$D^2(\xi) = 1.$$

27. *Se trage asupra unei ținte pînă la lovirea ei, după care tragerea încetează. Probabilitatea de a lovi ținta în n trageri este egală cu* $P(n)$.

Se cere să se determine valoarea medie a numărului de trageri care au fost efectuate.

SOLUȚIE. Presupunem că numărul tragerilor efectuate nu este limitat și că tragerea continuă și după atingerea țintei. În acest ultim caz obuzele ce se trag, încă asupra țintei vor fi de prisos.

Numim obuz „necesar" obuzul ce se trage asupra unei ținte nelovite și „suplimentar" dacă obuzul se trage asupra unei ținte deja lovite.

Fie ξ variabila ce ne dă numărul de trageri necesar pentru lovirea țintei.

ξ poate fi reprezentată sub forma

$$\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_i + \cdots$$

unde ζ_1 este numărul obuzelor necesare pentru prima tragere;

ζ_2 — numărul obuzelor necesare pentru a doua tragere;

. . . . . .

ζ_i — numărul obuzelor necesar pentru tragerea i.

ζ_1 nu este variabil și totdeauna egal cu unu; fiecare din ζ_i sînt mărimi aleatoare cu două valori posibile 0 și 1. Avem

$$m_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} m_{\zeta i}.$$

Definim valoarea medie a mărimii ζ_i ca numărul necesar de obuze în tragerea i. Această mărime ia valoarea zero dacă în tragerile anterioare $(i-1)$, ținta a fost atinsă și valoarea unu dacă în tragerile anterioare ținta n-a fost atinsă.

Distribuția variabilei $\zeta_i (i = 2, 3, ...)$ are forma

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline P(i-1) & 1 - P(i-1) \end{array}.$$

Prin urmare, pentru fiecare $i > 1$, valoarea medie a lui ζ_i, este

$$m_{\zeta i} = 1 - P(i-1).$$

Se observă că această formulă are loc și pentru $i = 1$. Prin urmare

$$m_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} [1 - P(i-1)]$$

sau, punînd $i - 1 = j$,

$$m_\xi = \sum_{j=0}^{\infty} [1 - P(j)].$$

28. *Un muncitor deservește n mașini de același tip dispuse în linie dreaptă la distanța a una de alta. Considerînd că muncitorul deservește mașinile trecînd succesiv la înlăturarea defectelor ce se ivesc, să se afle valoarea medie și dispersia drumului parcurs între mașini.*

SOLUȚIE. Numerotăm mașinile de la stînga la dreapta, de la 1 la n. Fie B_k evenimentul ca muncitorul să se afle la mașina cu numărul k. Cum am presupus că toate mașinile sînt de același tip atunci $p_i^{(k)}$ — probabilitatea ca următoarea mașină ce cere intervenție să poarte numărul i, este $p_i^{(k)} = \frac{1}{n}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

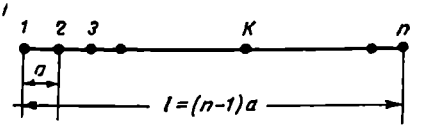


Fig. 17.

Lungimea drumului parcurs este egală cu

$$\lambda_i^{(k)} = \begin{cases} (k-i)\,a, & i \leqslant k, \\ (i-k)\,a, & i > k. \end{cases}$$

Deci

$$M(\lambda \mid B_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k)} p_i^{(k)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} (k-i)\,a + \sum_{i=k+1}^{n} (i-k)\,a\right) =$$

$$= \frac{a}{2n}\left[2k^2 - 2(n+1)\,k + n(n+1)\right].$$

Deoarece probabilitatea ca muncitorul să se afle la mașina cu numărul k, $P(B_k)$ este $\frac{1}{n}$, urmează că

$$M(\lambda) = M(M(\lambda \mid B_k)) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\, M(\lambda \mid B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{2n^2}\left[2k^2 - 2(n+1)\,k + n(n+1)\right] =$$

$$= \frac{a}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{a(n+1)}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \frac{an(n+1)}{2n^2},$$

de unde

$$M(\lambda) = \frac{l}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Pentru calculul dispersiei, vom determina mai întîi momentul de ordinul al doilea al variabilei λ. Avem

$$M(\lambda^2) = M(M(\lambda^2 \mid B_k)),$$

însă

$$M(\lambda^2 | B_k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}(k-i)^2 a^2 + \sum_{i=k+1}^{n}(i-k)\, a^2\right) =$$

$$= \frac{a^2}{6}[6k^2 - 6(n+1)k + (n+1)(2n+1)].$$

De aici urmează că

$$M(\lambda^2) = \frac{a^2}{6n}\sum_{k=1}^{n}[6k^2 - 6(n+1)k + (n+1)(2n+1)] = \frac{a^2(n^2-1)}{6}.$$

Deci

$$D^2(\lambda) = M(\lambda^2) - M^2(\lambda) = \frac{a^2(n^2-1)}{6} - \frac{a^2(n^2-1)^2}{9n^2}$$

sau

$$D^2(\lambda) = \frac{a^2(n^2-1)(n^2+2)}{18n^2}.$$

29. *Să se arate că funcția definită prin*

$$f(0, t) = 0,$$

$$f(n, t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots;\ \lambda t > 0,$$

poate reprezenta o densitate de repartiție a unei variabile aleatoare care ia valorile $n = 0, 1, 2, \ldots$

Să se arate că media ei este $e^{\lambda t}$ *și că dispersia este* $e^{2\lambda t} - e^{\lambda t}$.

SOLUȚIE. Se observă că pentru orice n, $f(n, t) \geqslant 0$. Pentru ca $f(n, t)$ să fie într-adevăr o densitate de repartiție, va trebui ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n, t) = 1.$$

Dar

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n, t) = e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = e^{-\lambda t}\cdot\frac{1}{e^{-\lambda t}} = 1,$$

dat fiind că seria se reduce la sumarea unei progresii geometrice cu rația $1 - e^{-\lambda t} < 1$.

Așadar

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots, & n & \ldots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}), \ldots, & e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Deducem mai departe că

$$M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n, t) = e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Pentru aceasta să considerăm egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda t})^n = e^{\lambda t}.$$

Prin derivare în raport cu t, obținem

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} \lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

și deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = e^{2\lambda t}. \tag{1}$$

Urmează atunci imediat că

$$M(\xi) = e^{-\lambda t} e^{2\lambda t} = e^{\lambda t}.$$

Pentru dispersie, să calculăm mai întîi $M(\xi^2)$.
Din definiție, rezultă că avem

$$M(\xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f(n, t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Din egalitatea (1) obținem imediat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(1 - e^{-\lambda t})^{n-2} \lambda e^{-\lambda t} = 2\lambda e^{2\lambda t},$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = 2e^{3\lambda t} - e^{2\lambda t}$$

și de aici rezultă momentul de ordinul al doilea

$$M(\xi^2) = 2e^{2\lambda t} - e^{\lambda t}$$

și prin urmare

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = e^{2\lambda t} - e^{\lambda t}.$$

30. *Să se determine condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească* $a = M(\xi)$, $b = M(\xi^2)$, $c = M(\xi^3)$ *pentru ca variabila* ξ *să ia numai valori întregi nenegative* $n \geqslant 0$, *cu probabilitățile* : $p_n = \dfrac{Ak^n + Bl^n}{n!}$, *unde* $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$.

SOLUȚIE. Introducem momentele factoriale de ordinul 1, 2, 3 ale variabilei ξ. Avem

$$a_1 = a = M(\xi),$$
$$a_2 = M[\xi(\xi - 1)] = b - a,$$
$$a_3 = M[\xi(\xi - 1)(\xi - 2)] = c - 3b + 2a.$$

Deoarece p_n sînt probabilități, rezultă că avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \text{; sau } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ak^n + Bl^n}{n!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n!} = Ae^k + Be^l = 1.$$

Notînd

$$Ae^k = u\text{; } Be^l = u_1\text{; avem } u + u_1 = 1.$$

Dar

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{Ak^n + Bl^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ak^n + Bl^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ak^{n+1} + Bl^{n+1}}{n!} =$$

$$= kA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} + lB \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n!} = ku + lu_1.$$

Deci

$$ku + lu_1 = a = a_1.$$

$$a_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot \frac{Ak^n + Bl^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Ak^n + Bl^n}{(n-2)!} =$$

$$= k^2 A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} + l^2 B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n!} = k^2 u + l^2 u_1.$$

Analog

$$a_3 = k^3 u + l^3 u_1.$$

Am obținut ecuațiile:

$$u + u_1 = 1,$$
$$ku + lu_1 = a,$$
$$k^2 u + l^2 u_1 = a_2,$$
$$k^3 u + l^3 u_1 = a_3.$$

Din prima, rezultă

$u = 1 - u_1$; cum $u \geqslant 0 \Rightarrow 1 - u_1 \geqslant 0$, $u_1 \leqslant 1$ și analog $u \leqslant 1$.

$u = 1 - u_1 \Rightarrow k(1 - u_1) + lu_1 = a$, $k - u_1(k - l) = a$;

$u_1 = \frac{k-a}{k-l} \leqslant 1$ deci $k - a \leqslant k - l$; $a \geqslant l$,

$$a = ku + lu_1 \geqslant l,$$
$$ku \geqslant l(1 - u_1).$$

Presupunem $u,\ u_1 \neq 0$; atunci

$$l \leqslant k;\quad l \leqslant a.$$

Pe de altă parte $u_1 = \frac{k-a}{k-l} > 0$, și cum $k - l > 0$ rezultă $k - a \geqslant 0$, $a \leqslant k$.

Deci

$$l \leqslant a \leqslant k.$$

Acum

$$a_2 = k^2 u + l^2 u_1 \leqslant k^2 + l^2 \leqslant k^2 \leqslant a^2$$

deoarece u și $u_1 \leqslant 1$. Prin urmare

$$a_2 \leqslant a^2.$$

Din $k^2 + l^2 \geqslant 2kl$, rezultă

$$kl(k^2 + l^2) \geqslant 2l^2k^2;\ kl(k^2 + l^2)\, uu_1 \geqslant 2l^2k^2 \cdot uu_1,$$

sau

$$k^4u^2 + l^4u_1^2 + kl(k^2 + l^2)uu_1 \geqslant k^4u^2 + l^4u_1^2 + 2l^2k^2uu_1,$$

$$(ku + lu_1)\,(k^3u + l^3u_1) \geqslant (k^2u + l^2u_1)^2,$$

$$aa_3 \geqslant a_2^2.$$

Deci

$$l \leqslant a \leqslant k,$$
$$a^2 \leqslant a_2,$$
$$a_2^2 \leqslant aa_3;$$

Aceste inegalități ne conduc la

$$l \leqslant a \leqslant k,\ b \geqslant a^2 + a \text{ și } a(c + a) \geqslant b^2 + ab,$$

care reprezintă condițiile necesare pe care trebuie să le îndeplinească a, b, c.

Suficiența acestor condiții reiese din rezolvarea efectivă a acestor inecuații, din care rezultă că l și k reprezintă rădăcinile ecuației

$$P(z) = (a_2 - a^2)z^2 - (a_3 - aa_2)z + (aa_3 - a_2^2) = 0.$$

Este suficient să se verifice că pentru condițiile stabilite, rădăcinile ultimei ecuații sînt pozitive, ca și valorile

$$u = \frac{l-a}{l-k} \quad \text{și} \quad u_1 = \frac{a-k}{l-k}.$$

Pentru aceasta trebuie observat că

$$P(a) = -(a_2 - a^2)^2 < 0,$$

astfel că a este cuprins între l și k.

31. *Variabila aleatoare* ξ *poate lua trei valori, dintre care una egală cu zero. Se cere*:

a) *Cunoscînd momentele de primele patru ordine să se determine valorile lui* ξ *și probabilitățile corespunzătoare.*

Să se găsească condiții necesare și suficiente ca aceste valori să fie: 1) *reale*, 2) *nenegative.*

b) *Caz particular*: $M_1 = 0$, $M_2 = 2$, $M_3 = -1$, $M_4 = \frac{21}{2}$.

SOLUȚIE. a) Din condițiile enunțului rezultă că avem ecuațiile

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 &= 1, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= M_1, \\ p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 &= M_2, \\ p_1 x_1^3 + p_2 x_2^3 &= M_3, \\ p_1 x_1^4 + p_2 x_2^4 &= M_4, \end{aligned}$$

unde $x_0 = 0$, x_1, x_2 sînt valorile variabilei aleatoare ξ, iar p_0, p_1, p_2 probabilitățile respective. Dacă considerăm ecuația de gradul al doilea: $x^2 + A_1 x + A_2 = 0$ ale cărei rădăcini sînt x_1 și x_2, observăm că avem îndeplinite următoarele egalități:

$$\begin{aligned} (1 - p_0)A_2 + M_1 A_1 + M_2 &= 0, \\ M_1 A_2 + M_2 A_1 + M_3 &= 0, \\ M_2 A_2 + M_3 A_1 + M_4 &= 0. \end{aligned}$$

Să privim aceste egalități ca ecuații în A_1 și A_2. Atunci pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca

$$\begin{vmatrix} 1 - p_0 & M_1 & M_2 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ M_2 & M_3 & M_4 \end{vmatrix} = 0.$$

De aici rezultă că

$$p_0 = \frac{\Delta_4}{\begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}}.$$

Ca p_0 să fie probabilitatea, trebuie ca

$$\Delta_4 \geqslant 0, \quad \begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{și} \quad \Delta_4 \leqslant \begin{vmatrix} M_2 & M_3 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}.$$

Aceste condiții sînt suficiente pentru ca $x_1 - x_2$ să fie reală, iar p_1, p_2 pozitivi, deoarece

$$M_2 M_4 - M_3^2 = p_1 p_2 x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2.$$

Pentru ca diferența $x_1 - x_2$ să fie pozitivă, este în plus necesar și suficient ca

$$M_1>0 \text{ și } M_1M_3 - M_2^2 = p_1p_2x_1x_2(x_2 - x_1)^2 >0,$$

adică toți minorii și toate elementele lui Δ_4 să fie pozitive.

b) În cazul particular dat rezultă imediat

$$p_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & \frac{21}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & & -1 \\ -1 & & \frac{21}{2} \end{vmatrix}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Mai departe

$$A_2 = x_1x_2 = -5,$$

$$A_1 = -(x_1 + x_2) = \frac{1}{2},$$

de unde avem imediat

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Urmează acum că

$$p_1 = \frac{2}{9}; \quad p_2 = \frac{8}{45}$$

și deci

$$\xi : \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 2 \\ \frac{8}{45} & \frac{3}{5} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

32. *Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare, care iau valori întregi nenegative și dacă pentru orice r și $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$ repartiția vectorului aleator $(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_r})$ este aceeași cu a vectorului aleator $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ atunci pentru orice $0 \leqslant k \leqslant n$ avem*

$$P(\xi_1 + \cdots + \xi_r < r;\ r = 1, 2, \ldots, k \mid \xi_1 + \cdots + \xi_n = k) = 1 - \frac{k}{n}. \qquad (1)$$

SOLUȚIE. În acest caz avem

$$M(\xi_i \mid \xi_1 + \cdots + \xi_n = k) = \frac{k}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cum $M(\xi_i|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)$ este independentă de i și $\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=M(\xi_1+\cdots+\xi_n|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=k$, vom arăta prin inducție că relația (1) este adevărată pentru orice pereche (n, k), unde $0\leqslant k\leqslant n$. Pentru (1, 0) și (1, 1) egalitatea (1) este verificată. Să presupunem că ea este adevărată pentru (1, 0), (1, 1), ..., $(n-1, 0)$, ..., $(n-1, n-1)$ și să arătăm că este adevărată pentru (n, k), unde $0\leqslant k\leqslant n$. Dacă $k=n$ atunci (1) este adevărată. Fie $k<n$. Dacă $0\leqslant j\leqslant k$, avem

$$P(\xi_1+\cdots+\xi_r<r;\ r=1, 2, \cdots k|\xi_1+\cdots+\xi_k=j,\ \xi_1+\cdots+\xi_n=k)=$$

$$=P(\xi_1+\cdots+\xi_r<r;r=1, 2, \cdots, j|\xi_1+\cdots+\xi_k=j)=1-\frac{j}{k},$$

deoarece egalitatea (1) este adevărată pentru (k, j). Atunci, din teorema probabilității totale, rezultă

$$P(\xi_1+\cdots+\xi_r<r;\ r=1, \ldots, k|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\left(1-\frac{j}{k}\right)P(\xi_1+\cdots+\xi_k=j|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=$$

$$=1-\frac{1}{k}M(\xi_r+\cdots+\xi_k|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=1-\frac{k}{n},$$

deoarece

$$M(\xi_1+\cdots+\xi_k|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=\sum_{i=1}^{k}M(\xi_i|\xi_1+\cdots+\xi_n=k)=\frac{k^2}{n}.$$

33. *Într-o urnă se găsesc A bile albe și B bile negre $(A+B)=N$. Din această urnă se fac n extracții succesive fără a pune bila extrasă înapoi.*

Se cere:

a) *Să se calculeze probabilitatea $P_n(\alpha)$ ca să scoatem α bile albe și β bile negre $(\alpha+\beta=n)$.*

b) *Să se determine* $\lim_{n\to\infty} P_n(\alpha)$.

c) *Să se calculeze momentele de ordinul întîi și dispersia.*

d) *Să se scrie expresia coeficientului de corelație.*

SOLUȚIE. a) Pentru a determina $P_n(\alpha)$ să calculăm numărul cazurilor posibile și numărul cazurilor favorabile.

Numărul cazurilor posibile este dat de numărul combinărilor care se pot face cu numărul total de bile N din urnă, luate în raport cu numărul bilelor extrase n, adică

$$C_N^n=C_{A+B}^{\alpha+\beta}.$$

Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul grupelor ce se pot forma de cîte α bile albe și β bile negre. Însă din cele A bile albe se pot

forma C_A^α grupe, care asociate cu C_B^β grupe ce se pot forma din cele B bile negre, ne dau $C_A^\alpha C_B^\beta$ grupe de cîte α bile albe și β bile negre.

Atunci

$$P_n(\alpha) = \frac{C_A^\alpha C_B^\beta}{C_N^n}$$

sau

$$P_n(\alpha) = \frac{C_A^\alpha C_B^\beta}{C_{A+B}^{\alpha+\beta}}.$$

b) Să observăm că

$$P_n(\alpha) = \frac{A(A-1)\dots(A-\alpha+1)}{\alpha!} \cdot \frac{B(B-1)\dots(B-\beta+1)}{\beta!} \times$$

$$\times \frac{n!}{N(N-1)\dots(N-n+1)}.$$

Să punem

$$p = \frac{A}{N}, \quad q = \frac{B}{N}$$

unde

$$p + q = 1.$$

Atunci

$$P_n(\alpha) = \frac{Np(Np-1)\dots(Np-\alpha+1) \cdot Nq(Nq-1)\dots(Nq-\beta+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \cdot \frac{n!}{\alpha!\beta!},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\alpha) = \frac{n!}{\alpha!\beta!} p^\alpha q^\beta.$$

c) Pentru calculul momentelor să observăm că cele n extracții succesive, formează o succesiune de variabile aleatoare dependente

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

fiecare dintre ele luînd valorile ξ_{i_1} (1, 0) și ξ_{i_2} (1, 0) cu probabilitățile respective

$$p_{i_1} \text{ și } p_{i_2}, \ (p_{i_1} + p_{i_2} = 1), \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Ne propunem deci să calculăm primele momente ale variabilei aleatoare

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n.$$

Să observăm că într-o singură probă, avem

$$\eta_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{i_1} & p_{i_2} \end{pmatrix},$$

Rezultă că

$$M_1 = M(\eta) = \sum_{i=1}^{n} M(\eta_i) = nP(\eta_i = 1),$$

unde $P(\eta_i = 1)$ este probabilitatea ca în extracția de rang i să iasă o bilă albă. Pentru calculul acestei probabilități să presupunem că am numerotat cele N bile din urnă de la 1 pînă la N și am aranjat aceste bile în ordinea

$$\underbrace{1, 2, \ldots, A-1, A}_{\text{bile albe}} \quad \underbrace{A+1, \ldots, N}_{\text{bile negre}}$$

și că rezultatul extracțiilor s-au prezentat astfel

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_N$$

unde ξ_i $(i = 1, \ldots, N)$ reprezintă numerele $1, \ldots, N$ luate cîte o singură dată.

Se observă că numărul cazurilor posibile este $N!$. Numărul cazurilor favorabile este dat de

$$A(N-1)!$$

deoarece o singură bilă apărută la extracția de rang i se poate asocia cu oricare dintre grupele de $N-1$ bile apărute în extracțiile de celelalte ranguri (diferite de i). Evident, numărul acestor grupe este $(N-1)!$. Cum fiecare dintre cele A bile albe, care pot ieși în extracția de rang i, se poate asocia la rîndul ei în cele $(N-1)!$ grupe, rezultă că numărul cazurilor favorabile este $A(N-1)!$

Atunci

$$M_1 = n\frac{A(N-1)!}{N!} = n\frac{A}{N}.$$

Cum

$$\frac{A}{N} = p,$$

rezultă că

$$M_1 = np.$$

Pentru calculul momentului de ordinul al doilea avem

$$M_2 = M(\eta^2) = M\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} M(\eta_i^2) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} M(\eta_i \eta_j).$$

Însă

$$\sum_{i=1}^{n} M(\eta_i^2) = np$$

cum se observă imediat.

Să calculăm acum

$$M(\eta_i \cdot \eta_j).$$

Variabila $\eta_i \cdot \eta_j$ poate lua valorile

$$(\eta_i = 1, \eta_j = 1), (\eta_i = 1, \eta_j = 0), (\eta_i = 0, \eta_j = 1) (\eta_i = 0, \eta_j = 0).$$

Rezultă că variabila $\eta_i \cdot \eta_j$ ia singura valoare 1, diferită de zero cu probabilitatea

$$P(\eta_i = 1, \eta_j = 1).$$

Să calculăm această probabilitate. Numărul cazurilor posibile este dat de $N!$, întrucît în fiecare din extracțiile de rangul i și j poate să apară oricare din cele N bile din urnă.

Numărul cazurilor favorabile se obține asociind în toate modurile posibile cele două bile albe ieșite în extracțiile de rangul i și j cu oricare dintre cele $(N-2)!$ grupe ce se pot forma cu restul de $N-2$ bile apărute în celelalte extracții. Însă în extracțiile de rang i și j pot apare oricare dintre cele A bile albe și deci numărul cazurilor favorabile este egal cu

$$A(A-1)\,(N-2)!$$

Atunci

$$P(\eta_i = 1, \eta_j = 1) = \frac{A(A-1)(N-2)!}{N!} = \frac{A(A-1)}{N(N-1)}$$

sau

$$P(\eta_i = 1, \eta_j = 1) = \frac{p(Np-1)}{N-1}$$

unde

$$p = \frac{A}{N}.$$

Rezultă că

$$M_2 = np + 2\sum_{i \neq j} M(\eta_i \cdot \eta_j).$$

Însă numărul indicilor $i \neq j$ este dat de C_n^2 și deci

$$M_2 = np + n(n-1) \cdot \frac{(Np-1)\,p}{N-1}.$$

Cum

$$D^2 = M_2 - M_1^2$$

avem

$$D^2 = np + n(n-1)\,\frac{(Np-1)\,p}{N-1} - n^2p^2.$$

Sau efectuînd calculele obținem

$$D^2 = np(1-p) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

d) Pentru calculul coeficientului de corelație

$$\rho(\eta_i, \eta_j)$$

se observă că variabilele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sînt echivalente și deci

$$\rho(\eta_i, \eta_j) = \rho(\eta_1, \eta_2).$$

Prin urmare

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{M(\eta_1 \cdot \eta_2) - M(\eta_1)M(\eta_2)}{D(\eta_1)\,D(\eta_2)} = \frac{\dfrac{A(A-1)}{N(N-1)} - \left(\dfrac{A}{N}\right)^2}{\dfrac{A}{N}\left(1 - \dfrac{A}{N}\right)} = -\frac{1}{N-1},$$

deci

$$\rho(\eta_i, \eta_j) = -\frac{1}{N-1}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n.$$

Observație. Dispersia se poate calcula acum utilizînd următoarea relație

$$D^2(\eta) = \sum_{k=1}^{n} D^2(\eta_k) + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} D(\eta_j)\, D(\eta_k)\, \rho\,(\eta_j, \eta_k).$$

34. *În condițiile exercițiului* 33 *să se calculeze momentul de ordinul al treilea.*

SOLUȚIE. Prin definiție avem

$$M_3 = M\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} M(\eta_i^3) + 3\sum_{i \neq j} M(\eta_i^2 \cdot \eta_j) +$$
$$+ 6 \sum_{i \neq j \neq k} M(\eta_i\, \eta_j\, \eta_k) = np + 3n(n-1)\, M(\eta_i^2 \eta_j) +$$
$$+ n\,(n-1)\,(n-2)\, M\,(\eta_i\, \eta_j\, \eta_k).$$

Ne rămîne să calculăm

$$M(\eta_i^2, \eta_j) \text{ și } M(\eta_i\, \eta_j\, \eta_k).$$

Pentru aceasta vom considera variabilele $\eta_i^2 \cdot \eta_j$ și $\eta_i \cdot \eta_j \cdot \eta_k$. Variabila $\eta_i^2 \cdot \eta_j$ poate lua valorile

$$(\eta_i^2 = 1,\ \eta_j = 1),\ (\eta_i^2 = 1,\ \eta_j = 0),\ (\eta_i^2 = 0,\ \eta_j = 1),\ (\eta_i^2 = 0,\ \eta_j = 0),$$

iar variabila $\eta_i \cdot \eta_j \cdot \eta_k$ valorile

$$(\eta_i = 1,\ \eta_j = 1,\ \eta_k = 1),\ (\eta_i = 1,\ \eta_j = 1,\ \eta_k = 0),\ \ldots,\ (\eta_i = 0,\ \eta_j = 0,\ \eta_k = 0).$$

Se observă că fiecare dintre variabilele $\eta_i^2 \cdot \eta_j$ și $\eta_i \cdot \eta_j \cdot \eta_k$ iau numai o singură dată o valoare diferită de zero și anume cînd iau valoarea 1. Trebuie, deci,

să determinăm probabilitățile

$$P(\eta_i^2 = 1,\ \eta_j = 1)$$

$$P(\eta_i = 1,\ \eta_j = 1,\ \eta_k = 1).$$

Se deduce imediat că

$$P(\eta_i^2 = 1,\ \eta_j = 1) = \frac{A(A-1)}{N(N-1)} = \frac{p(Np-1)}{N-1},$$

iar

$$p(\eta_i = 1,\ \eta_j = 1,\ \eta_k = 1) = \frac{A(A-1)(A-2)}{N(N-1)(N-2)} = \frac{p(Np-1)(Np-2)}{(N-1)(N-2)}.$$

Atunci

$$M_3 = np + 3n(n-1)\frac{(Np-1)p}{N-1} + n(n-1)(n-2)\frac{(Np-1)(Np-2)p}{(N-1)(N-2)}.$$

Efectuînd calculele obținem

$$M_3 = [(Np-1)(Np-2)pn^3 + 3N(Np-1)pqn^2 +$$

$$+ N^2(1-2p)pqn]\cdot\frac{1}{(N-1)(N-2)}.$$

35. *Să considerăm succesiunea de variabile aleatoare independente*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

fiecare dintre variabilele ξ_h, $h = 1, 2, \ldots, n$ *putînd lua valorile unu sau zero cu probabilitățile respective* p_h *și* q_h, $p_h + q_h = 1$.

Să se calculeze: valoarea medie, momentul de ordinul al doilea și dispersia variabilei

$$\theta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

SOLUȚIE. Avem

$$M_1 = M(\theta_n) = M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \sum_{h=1}^{n} M(\xi_h) = \sum_{h=1}^{n} p_h,$$

$$M_2 = M(\theta_n^2) = M\left(\sum_{h=1}^{n}\xi_h\right)^2 = \sum_{h=1}^{n} M(\xi_h^2) +$$

$$+ 2\sum_{h\neq k} M(\xi_h)M(\xi_k) = \sum_{h=1}^{n} p_h + 2\sum_{h\neq k} p_h p_k,$$

iar dispersia este dată de

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = \sum_{h=1}^{n} p_h + 2\sum_{h\neq k} p_h p_k - \left(\sum_{h=1}^{n} p_h\right)^2 = \sum_{h=1}^{n} p_h q_h.$$

36. *Să considerăm variabila* $\sum_{h=1}^{n} \xi_h$ *definită mai înainte și succesiunea de variabile independente* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *fiecare din ele luînd valorile unu sau zero cu probabilitățile respective* p *și* q, $p + q = 1$, *unde*

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}.$$

Să se determine diferența dintre dispersia variabilei $\sum_{h=1}^{n} \xi_h$ *și a variabilei* $\sum_{h=1}^{n} \eta_h$.

SOLUȚIE. Din exercițiul precedent rezultă că dispersia variabilei $\sum_{h=1}^{n} \xi_h$ este egală cu

$$\sum_{h=1}^{n} p_h q_h.$$

Dispersia variabilei $\sum_{h=1}^{n} \eta_h$ este evident npq deoarece sîntem în cazul distribuției binomiale (simple) cu probabilități constante în fiecare probă.

Să considerăm acum expresiile

$$\sum_{h=1}^{n} (p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^{n} p_h^2 - np^2,$$

$$\sum_{h=1}^{n} (q_h - q)^2 = \sum_{h=1}^{n} q_h^2 - nq^2.$$

Adunînd egalitățile de mai înainte și observînd că

$$\sum_{h=1}^{n} (p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^{n} (q_h - q)^2,$$

obținem

$$2 \sum_{h=1}^{n} (p_h - p)^2 = \sum_{h=1}^{n} p_h^2 + \sum_{h=1}^{n} q_h^2 - np^2 - nq^2 =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} (p_h + q_h)^2 - 2 \sum_{h=1}^{n} p_h q_h - n(p + q)^2 + 2npq,$$

de unde rezultă că

$$npq = \sum_{h=1}^{n} p_h q_h + \sum_{h=1}^{n} (p_h - p)^2,$$

deoarece

$$\sum_{h=1}^{n} (p_h + q_h)^2 = n(p + q)^2 = n.$$

Rezultă că dispersia variabilei $\sum_{h=1}^{n} \eta_h$ este mai mare decît dispersia variabilei $\sum_{h=1}^{n} \xi_h$, întrucît diferența dintre cele două dispersii este

$$\sum_{h=1}^{n} (p_h - p)^2 > 0.$$

37. *Fie variabila aleatoare* ξ *cu densitatea de repartiție dată de*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0, 2), \\ \frac{1}{2} & x \in (0, 2). \end{cases}$$

Se cere:
a) *Funcția de repartiție.*
b) *Modul și mediana.*
c) *Funcția caracteristică.*
d) Momentele de ordinul k.

SOLUȚIE. a) Prin definiție, funcția de repartiție $F_\xi(x)$, este dată de

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{2} & 0 < x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2, \end{cases}$$

de unde

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < 2, \\ 1 & x \geqslant 2. \end{cases}$$

b) Modul, se vede imediat că este dat de mulțimea punctelor $x \in (0, 2)$. Mediana o aflăm din relațiile:

$$\int_0^\alpha \mathrm{d}F_\xi(x) = \int_\alpha^2 \mathrm{d}F_\xi(x) = \frac{1}{2}.$$

De aici rezultă că mediana $\alpha = 1$.
c) Din definiția funcției caracteristice, avem

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{itx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2it} e^{itx}\Big|_0^2 = \frac{1}{2it}(e^{2it} - 1),$$

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2it}(e^{2it} - 1) \text{ sau } \varphi_\xi(t) = \frac{1}{2it}(\cos 2t - 1 + i \sin 2t).$$

$$\text{d) } M_k(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{2(k+1)} x^{k+1}\Big|_0^2 = \frac{2^{k+1}}{2(k+1)}; \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Deci

$$M_k(\xi) = \frac{2^k}{k+1};\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

38. *Se dau densitățile de repartiție*

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dacă } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dacă } |x| < 1, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x| & \text{dacă } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$

Se cere să se calculeze pentru fiecare densitate de repartiție valoarea medie și dispersia.

SOLUȚIE. a) Avem

$$M_1 = \int_0^1 xf(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$M_2 = \int_0^1 x^2 f(x)dx = 2\int_0^1 x^3 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Atunci

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = \frac{1}{18}.$$

b) În cazul celei de a doua densități, avem

$$M_1 = \int_0^1 - x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = 0$$

$$M_2 = \int_{-1}^0 - x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

și deci

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = \frac{1}{2}$$

c) Să observăm că

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } 0 < x < 1, \\ 2-x & \text{dacă } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Atunci

$$M_1 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x^2\Big|_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 1$$

$$M_2 = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + 2\,\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 4 + \frac{1}{4} = \frac{14}{3},$$

de unde

$$D^2 = \frac{11}{3}.$$

39. *Se dau funcțiile de repartiție*

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0, \\ x^2 & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0, \\ x^{\frac{1}{2}} & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se calculeze valorile medii și dispersiile corespunzătoare.

SOLUȚIE. a) Se observă că

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x < 0, \\ 2x & \text{dacă} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dacă} \quad x > 1, \end{cases}$$

Valoarea medie și dispersia am calculat-o în problema precedentă.

b) Densitatea de repartiție este dată de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Atunci:

$$M_1 = \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3},$$

$$M_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{5},$$

și

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

40. *Se dau densitățile de repartiție*

a) $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1}$,

b) $f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-2}$,

c) $f(x) = \frac{8}{\pi 3\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-3}$

Să se calculeze valorile medii și dispersiile.

SOLUȚIE. a) Valoarea medie este dată de

$$M = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1} dx$$

Se observă că valoarea medie nu există; de asemenea nici dispersia.

b) Avem

$$M_1 = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-2} dx = 0,$$

iar

$$M_2 = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-2} dx = 3.$$

Rezultă că

$$D^2 = 3.$$

c) Avem

$$M_1 = \frac{8}{\pi 3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-3} dx = 0,$$

iar

$$M_2 = \frac{8}{\pi 3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-3} dx = 1.$$

Atunci,

$$D^2 = 1,$$

41. *Legea de probabilitate a variabilei aleatoare* ξ *este dată de fig. 18. Se cere*:

a) *Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei* ξ.

b) *Să se calculeze valoarea medie a variabilei* ξ.

c) *Să se calculeze dispersia* $D^2(\xi)$.

SOLUȚIE. a) Fie $f(x)$ densitatea de repartiție a variabilei ξ. Avem

$$f(x) = \begin{cases} a & -l \leqslant x \leqslant l, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Determinăm constanta a din condiția că $f(x)$ este o densitate de repartiție

$$1 = \int_{-l}^{l} f(x)\,dx = a\int_{-l}^{l} dx = 2a\int_{0}^{l} dx = 2\,la,$$

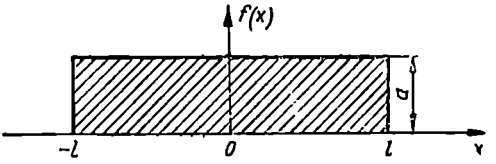


Fig. 18.

de unde

$$a = \frac{1}{2l}.$$

b) Prin definiție

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} x\,dx = 0.$$

c) Deoarece $M(x) = 0$ obținem

$$D^2(x) = \int_{-l}^{l} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2l}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l^2}{3} \simeq 0{,}333\,l^2.$$

42. *Variabila aleatoare ξ urmează o lege de distribuție a cărei densitate este dată grafic în figura 19.*

Se cere:

a) *Expresia densității de repartiție.*

b) *Valoarea medie.*

c) *Dispersia.*

d) *Coeficientul de asimetrie.*

e) $P\left(\frac{1}{4} < \xi < \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\xi > \frac{3}{4} \mid \xi > \frac{1}{2}\right)$.

SOLUȚIE. a) Densitatea de repartiție are aspectul

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{pentru} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{pentru} \quad x < 0 \text{ și } x > 1, \end{cases}$$

Din proprietățile densității de repartiție, rezultă

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = a\int_0^1 x\,dx = \frac{a}{2},$$

de unde

$$a = 2,$$

b) Prin definiție

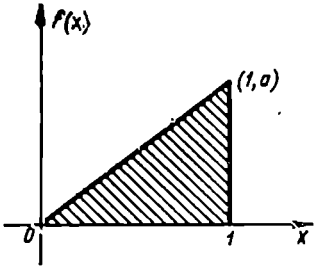


Fig. 19.

$$M(\xi) = \int_0^1 xf(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}.$$

c) Vom calcula mai întîi momentul de ordinul al doilea,

$$M_2(\xi) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi) = \frac{1}{18}.$$

d) Prin definițe, coeficientul de asimetrie γ_1, are expresia

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

avem

$$\mu_3 = 2\int_0^1 x\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 dx = -\frac{1}{135} \text{ și } \mu_2 = \frac{1}{2\cdot 3^2},$$

de unde

$$\gamma_1 = -\frac{2}{5}\cdot\sqrt{2}.$$

e) Întrucît ξ este o variabilă aleatoare continuă

$$P\left(\frac{1}{4} < \xi < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right).$$

Însă

$$F(x) = 2\int_0^x y\,dy = x^2.$$

Deci

$$P\left(\frac{1}{4} < \xi < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Prin definiție

$$P\left(\xi > \frac{3}{4} \mid \xi > \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\xi > \frac{3}{4},\ \xi > \frac{1}{2}\right)}{P\left(\xi > \frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - F\left(\frac{3}{4}\right)}{1 - F\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{12}.$$

43. *Legea de probabilitate a variabilei* ξ *este dată în fig. 20.*
Se cere:

a) *Să se scrie densitatea de repartiție.*

b) *să se calculeze valoarea medie.*

c) *să se calculeze dispersia.*

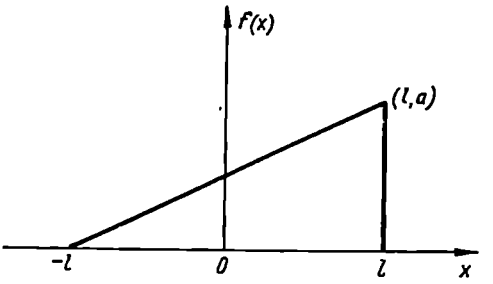


Fig. 20.

SOLUȚIE. a) Avem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < -l, \\ \frac{a}{2l}x + \frac{a}{2} & \text{pentru } -l \leqslant x \leqslant l, \\ 0 & \text{pentru } x > l. \end{cases}$$

Determinăm constanta a din condiția că $f(x)$ este o densitate de repartiție

$$1 = \frac{a}{2}\int_{-l}^{l}\left(\frac{x}{l} + 1\right)\mathrm{d}x = al,$$

de unde

$$a = \frac{1}{l}, \text{ deci } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < -l, \\ \frac{x}{2l^2} + \frac{1}{2l} & \text{pentru } -l \leqslant x \leqslant l, \\ 0 & \text{pentru } x > l. \end{cases}$$

b) Prin definiție

$$M(x) = \int_{-l}^{l} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{l}{3}.$$

c) Avem

$$M_2(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left(\frac{x^3}{l} + x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{l^2}{3}.$$

Cum $D^2(x) = M_2(x) - M_1^2(x)$, rezultă că

$$D^2(x) = \frac{2l^2}{9}.$$

44. *Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiție este*

$$f(x) = \begin{cases} c \ln\left(\frac{a}{x}\right) & \text{pentru } 0 \leqslant x < a, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se determine constanta c și să se calculeze valoarea medie, momentul de ordinul al doilea și dispersia variabilei ξ.

SOLUȚIE. Din proprietățile densității de repartiție, rezultă

$$1 = c\int_0^a \ln\frac{a}{x}\,dx = c\int_0^a (\ln a - \ln x)\,dx = ca\ln a - c\int_0^a \ln x\,dx = ca,$$

deci

$$c = \frac{1}{a}.$$

Celelalte caracteristici sînt date de

$$M(\xi) = \frac{1}{a}\int_0^a x\ln\left(\frac{a}{x}\right)dx = \frac{a}{2},$$

$$M(\xi^2) = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\ln\left(\frac{a}{x}\right)dx = \frac{a^2}{2},$$

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi) = \frac{a^2}{4}.$$

45. *Cunoscînd funcția de repartiție a depărtării stelelor de la steaua cea mai apropiată: $F(r) = 1 - e^{-\frac{4}{3}\pi\lambda r^3}$ și numărul mediu de stele în cubul parsec în vecinătatea soarelui $\lambda = 0{,}00163$, să se afle valoarea medie și dispersia variabilelor r.*

SOLUȚIE. Prin definiție, avem

$$M(r) = \int_R x\,dF(x) = \int_0^\infty r\,dF(r) = \int_0^\infty 4\pi\lambda r^3 e^{-\frac{4}{3}\pi\lambda r^3}\,dr.$$

Făcînd substituția $\frac{4}{3}\pi\cdot\lambda\cdot r^3 = x$, obținem

$$M(r) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\lambda}}\int_0^\infty x^{\frac{1}{3}} e^{-x}\,dx = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\lambda}}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\lambda}}$$

sau

$$M(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{36\pi\lambda}}.$$

În cazul în care $\lambda = 0{,}0063$, găsim valoarea aproximativă

$$M(r) \simeq 3{,}0.$$

Momentul de ordinul al doilea, este

$$M(r^2) = \int_0^\infty 4\pi\lambda r^4 e^{-\frac{4}{3}\pi\lambda r^3} dr = \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2\lambda^2}} \int_0^\infty x^{\frac{2}{3}} e^{-x} dx =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2\lambda^2}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{6\pi^2\lambda^2}}.$$

Dispersia este dată de egalitatea $D^2(r) = M_2(r) - M^2(r)$. Înlocuind valorile calculate mai înainte, obținem

$$D^2(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{6\pi^2\lambda^2}} - \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2}{6\sqrt[3]{6\pi^2\lambda^2}} = \frac{6\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2}{6\sqrt[3]{6\pi^2\lambda^2}}.$$

46. *O particulă se deplasează pe o axă pornind din origine, putînd să se miște fie la dreapta cu o unitate, fie la stînga cu o unitate la fiecare pas. Fie variabila aleatoare ξ_i care poate lua valorile $+1$ sau -1 după cum pasul i este la dreapta sau la stînga și fie $S_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i$. În aceste condiții $S_m = 0$ este evenimentul care constă în întoarcerea particulei în origine după m pași, care se poate realiza desigur numai dacă m este par.*

Presupunînd că

$$P(\xi_i = 1) = \begin{cases} p > \frac{1}{2} \text{ ori de cîte ori } S_{i-1} < 0, \\ \frac{1}{2} \text{ ori de cîte ori } S_{i-1} = 0, \\ q = 1 - p \text{ ori de cîte ori } S_{i-1} > 0, \end{cases}$$

să se arate că valoarea medie a numărului de întoarcere în origine M_n după $2n$ pași este

$$M_n \approx \left(2 - \frac{1}{p}\right) n.$$

SOLUȚIE. Notăm $P\{S_{2m} = 2k\}$ cu $P_m(k)$ și considerăm valoarea medie a lui $|S_{2m}|$.

$$M|S_{2m}| = \sum_{k=-m}^{m} |2k| P_m(k) = 4 \sum_{k=1}^{m} k P_m(k).$$

Următoarele relații de recurență sînt stabilite ușor

$$P_{m+1}(0) = 2p^2 P_m(1) + pP_m(0),$$

$$P_{m+1}(1) = p^2 P_m(2) + 2pqP_m(1) + \frac{q}{2} P_m(0).$$

$$P_{m+1}(k) = p^2 P_m(k+1) + 2pqP_m(k) + q^2 P_m(k-1) \text{ pentru } 1 < k < m,$$

$$P_{m+1}(m) = 2pqP_m(m) + q^2 P_m(m-1),$$

$$P_{m+1}(m+1) = q^2 P_m(m).$$

În consecință

$$M|S_{2m+2}| = 2\sum_{k=1}^{m} 2kP_{m+1}(k) =$$

$$= 4p^2 \sum_{k=1}^{m-1} kP_m(k+1) + 8pq \sum_{k=1}^{m} kP_m(k) + 4q^2 \sum_{k=2}^{m+1} kP_m(k-1) + 2qP_m(0) =$$

$$= 4p^2 \sum_{k=1}^{m} (k-1) P_m(k) + 8pq \sum_{k=1}^{m} kP_m(k) + 4q^2 \sum_{k=1}^{m} (k+1) P_m(k) +$$

$$+ 2qP_m(0) = M|S_{2m}| + 4(q^2 - p^2) \sum_{k=1}^{m} P_m(k) + 2qP_m(0) =$$

$$= M|S_{2m}| + 2[1 - 2p + pP_m(0)].$$

Deoarece $M|S_2| = 2q$, sumînd după m de la 1 la n rezultă

$$M_n = \sum_{m=1}^{n} P_m(0) = \frac{2n(2p-1) + M|S_{2n+2}| - 2q}{2p}. \tag{2}$$

Deoarece $M|S_{2n+2}| > 0$, avem o micșorare pentru M_n.
Pentru a găsi o margine superioară, arătăm că

$$P_m(k+1) < \frac{q}{p} P_m(k), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

pentru toți $m > 0$. Demonstrația depinde de relația (1) și se face prin inducție după m.

Urmează că

$$M|S_{2n+2}| < 4 \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{q}{p}\right)^k P_{n+1}(0) < \frac{4q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} = \frac{4q}{p} \cdot \frac{1}{(1 - q/p)^2}.$$

Prin urmare, din (2)

$$\frac{n(2p-1)}{p} + C_2 > M_2 > \frac{n(2p-1)}{p} + C_1$$

ceea ce implică rezolvarea problemei.

47. *Fie* ξ *variabila aleatoare cu densitatea de repartiție dată de*

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad -l < x < l.$$

Să se calculeze valoarea medie, dispersia, abaterea medie pătratică și coeficientul de asimetrie.

SOLUȚIE. Prin definiție

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{x\,dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0,$$

și

$$M_2(\xi) = \int_{-l}^{l} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{l^2}{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{\frac{x^2}{l^2}\,\mathrm{d}\frac{x}{l}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} =$$

$$= \frac{l^2}{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{y^2\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}}, \text{ unde } y = \frac{x}{l},$$

$$M_2(\xi) = \frac{l^2}{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{-y\,\mathrm{d}\,(1 - y^2)}{2\sqrt{1 - y^2}} = \frac{2l^2}{2\pi}\int_{-l}^{l} -y\,\mathrm{d}\sqrt{1 - y^2},$$

sau integrînd prin părți

$$M_2(\xi) = \frac{l^2}{\pi}\left[-x\sqrt{l^2 - x^2} + \arcsin\frac{x}{l}\right]_{-l}^{l} = \frac{l^2}{2\pi}\pi = \frac{l^2}{2}.$$

Cum $M(\xi) = 0$ și $D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi)$, rezultă că

$$D^2(\xi) = \frac{l^2}{2},$$

și prin urmare abaterea medie patratică

$$\sigma(\xi) = l\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deoarece repartiția dată este simetrică, coeficientul de asimetrie este egal cu zero.

48. *Se dă funcția de repartiție*

$$F(x, k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}, \quad x > 0,$$

(care se mai numește și repartiția Erlang, cu numeroase aplicații practice mai ales în telefonie). Se cere: să se calculeze densitatea de repartiție și momentul de ordinul k.

SOLUȚIE. Densitatea de repartiție se obține imediat

$$f(x, k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda x} x^{k-1}}{\Gamma(k)}.$$

Pentru calculul momentului de ordinul r, avem

$$M_r = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} x^{r+k-1} \, dx = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\Gamma(r+k)}{\lambda^{r+k}},$$

de unde rezultă că

$$M_r = \frac{1}{\lambda^r} \cdot \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(k)} = \lambda^{-r} \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!},$$

sau

$$M_r = k(k+1)\ldots(k+r-1)\,\lambda^{-r}.$$

49. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare ce urmează o lege normală de parametrii* 0 *și* 1.

Se cere:

$$M(|\xi|^{2r}) \text{ și } M(|\xi|^{2r+1}).$$

SOLUȚIE. Prin definiție

$$M(|\xi|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)\, dx,$$

și deoarece ξ este o variabilă aleatoare normală, de parametrii 0 și 1, avem

$$M(|\xi|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left| -e^{-\frac{x^2}{2}} \right|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0{,}798.$$

Momentele absolute relative la origine le vom calcula prin recurență

$$M(|\xi|^{s+2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{s+2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{s+1} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left| x^{s+1} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \right|_0^\infty + \frac{2(s+1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^s \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (s+1) M(|\xi|^s),$$

de unde $\left[\text{deoarece } M(|\xi|^0) = 1 \text{ și } M(|\xi|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$,

$$M(|\xi|^{2r}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1) = \frac{(2r)!}{2^r \cdot r!},$$

$$M(|\xi|^{2r+1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^r \cdot r!.$$

În cazul momentelor obișnuite

$$M(\xi^{2r+1}) = 0 \text{ și } M(\xi^{2r}) = M(|\xi|^{2r}).$$

50. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare ce urmează o lege normală de parametrii* a *și* σ.

Se cere:

$$M(|\xi - a|).$$

SOLUȚIE. Din definiția valorii medii

$$M(|\xi - a|) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a| e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = -\frac{2\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \Big|_{0}^{\infty} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Prin urmare

$$M(|\xi - a|) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

51. *Se consideră o variabilă aleatoare* ξ *care urmează o lege uniformă în* $[0, 1]$. *Să se arate că*:

$$M(\xi) = \frac{1}{2} : \; d(\xi) = \frac{1}{4};$$

$$D^2(\xi) = \frac{1}{12} : \; \Delta_1 = \frac{1}{3}.$$

SOLUȚIE. Spunem că variabila ξ urmează o lege uniformă în intervalul $[0, 1]$ dacă densitatea ei de repartiție are expresia

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

Avem

$$M(\xi) = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

și

$$M_2(\xi) = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

de unde rezultă

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi) = \frac{1}{12}.$$

Pentru media abatere d, avem

$$d = \int_0^1 |x - M|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Prin definiție, media diferenței, Δ_1 are expresia

$$\Delta_1 = \iint |x - y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Făcînd schimbarea de variabilă:

$$x - y = u,$$

$$x = v,$$

cum Jacobianul transformării $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1$, rezultă că

$$\Delta_1 = \iint |u|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\int_{-1}^0 \mathrm{d}u \int_0^{u+1} u\mathrm{d}v + \int_0^1 \mathrm{d}u \int_u^1 u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}.$$

52. *Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiție este*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x}{\sigma}},\ 0 \leqslant x \leqslant \infty,\ \sigma > 0.$$

Să se arate că cumulantul de ordinul r este

$$k_r = \sigma^r (r - 1)!$$

SOLUȚIE. Prin definiție

$$i^r k_r = \left\{\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}t^{r-1}}\left[\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right]\right\}_{t=0},$$

dacă există derivatele pînă la ordinul r ale funcției caracteristice $\varphi(t)$.

Vom calcula funcția caracteristică

$$\varphi(t) = M(e^{itx}) = \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty e^{itx - \frac{x}{\sigma}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty e^{-x\left(it - \frac{1}{\sigma}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1 - it\sigma}.$$

Calculăm raportul $\varphi'(t)/\varphi(t)$

$$\varphi'(t) = i\sigma(1 - it\sigma)^{-2}$$

și

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = i\sigma(1 - it\sigma)^{-1}.$$

Prin urmare $k_1 = \sigma$,

$$k_2 = \frac{1}{i^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)_0 = \frac{1}{i^2}[i^2\sigma^2(1 - it\sigma)^{-2}]_0 = \sigma^2,$$

$$k_3 = \frac{1}{i^3}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)_0 = \frac{1}{i^3}[1\cdot 2\cdot i^3\sigma^3(1 - it\sigma)^{-3}]_0 = 2!\,\sigma^3,$$

$$k_4 = \frac{1}{i^4}\cdot\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)_0 = \frac{1}{i^4}[1\cdot 2\cdot 3\cdot i^4\sigma^4(1 - it\sigma)^{-4}]_0 = 3!\,\sigma^4,$$

. . . . . .

$$k_r = \frac{1}{i^r}\cdot\frac{\mathrm{d}t^{r-1}}{\mathrm{d}t^{r-1}}\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)_0 = \frac{1}{i^r}[1\cdot 2\ldots(r-1)i^r\sigma^r(1 - it\sigma)^{-r}]_0 = (r-1)!\,\sigma^r.$$

53. *Se dă funcția*

$$f(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}}x^{n-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty.$$

Se cere:

a) *Să se determine constanta k astfel încît f(x) să fie o densitate de repartiție.*

b) *Să se arate că*

$$M_1 = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

$$M_2 = n.$$

SOLUȚIE. a) Din proprietățile densității de repartiție rezultă că

$$1 = k\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}x^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $u = \frac{x^2}{2}$, obținem

$$1 = 2^{\frac{n}{2}-1}k\int_0^\infty u^{\frac{n-2}{2}}e^{-u}\,\mathrm{d}u = k\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

de unde

$$k = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

b) Să calculăm valoarea medie. Avem

$$M_1 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Notînd $\frac{x^2}{2} = u$, obținem

$$M_1 = \frac{2^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\,du = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Momentul de ordinul al doilea este dat de

$$M_2 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x^{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-u}\cdot u^{\frac{n}{2}}\,du =$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n.$$

54. *Fie variabila aleatoare* ξ *ce urmează o lege dată de densitatea de repartiție*:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{\sigma}} & \text{pentru} \quad x \in [0, \infty), \\ 0 & \text{pentru} \quad x \notin [0, \infty), \end{cases}$$

unde $\sigma > 0$.

Să se arate că:

a) *media, abaterea medie pătratică și media diferenței sînt toate egale cu* σ.

b) *distanța dintre cuartile este* $\sigma \ln 3$.

SOLUȚIE. a) Determinăm mai întîi constanta k, din condiția că $f(x)$ este o densitate de repartiție și deci

$$k = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx} = \frac{1}{\sigma};$$

$$M_1(\xi) = \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = \frac{1}{\sigma}\left[-xe^{-\frac{x}{\sigma}}\Big|_0^\infty + \sigma\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx\right].$$

Deci $M_1(\xi) = \sigma$

$$D(\xi) = \sqrt{M_2(\xi) - M_1^2(\xi)},$$

$$M_2(\xi) = \frac{1}{\sigma}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = \int_0^\infty x^2 d\left(-e^{-\frac{x}{\sigma}}\right) = 2\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = 2\sigma^2.$$

Urmează deci că

$$D(\xi) = \sigma.$$

Prin definiție, media diferenței notată cu Δ_1 este

$$\Delta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|\,dF(x)\,dF(y).$$

În cazul nostru, avem

$$\Delta_1 = \frac{1}{\sigma^2}\iint\limits_{(x,y)\in[0,\infty)\times[0,\infty)} |x-y|\,e^{-\frac{x}{\sigma}}e^{-\frac{y}{\sigma}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\iint\limits_{(D_1)}(x-y)e^{-\frac{x+y}{\sigma}}\,dx\,dy - \frac{1}{\sigma^2}\iint\limits_{(D_2)}(x-y)e^{-\frac{x+y}{\sigma}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty\int_0^\infty (x-y)e^{-\frac{x+y}{\sigma}}\,dx\,dy - \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty\int_0^\infty (x-y)e^{-\frac{x+y}{\sigma}}\,dx\,dy,$$

de unde rezultă (fig. 21) că

$$\Delta_1 = \sigma.$$

b) Din definiția cuartilelor, avem

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^{\alpha_1} e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = \frac{1}{\sigma}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = \frac{1}{\sigma}\int_{\alpha_3}^{\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = \frac{1}{4}.$$

Găsim imediat

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^{\alpha_1} e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = 1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma}},$$

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\alpha_3}^{\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}}\,dx = e^{-\frac{\alpha_3}{\sigma}}.$$

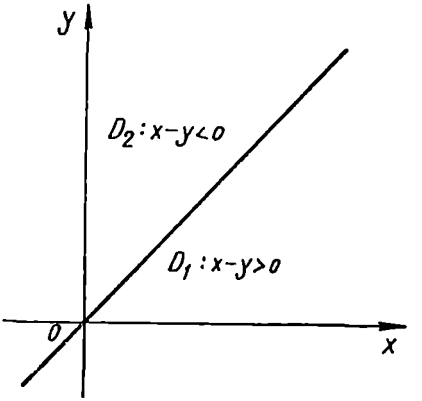


Fig. 21.

Din $1 - e^{-\frac{\alpha_1}{\sigma}} = \frac{1}{4}$ deducem

$$\alpha_1 = \sigma(\ln 4 - \ln 3),$$

iar din $e^{-\frac{\alpha_3}{\sigma}} = \frac{1}{4}$ deducem

$$\alpha_3 = \sigma \ln 4.$$

Urmează deci că

$$\alpha_3 - \alpha_1 = \sigma \ln 3.$$

55. *Se dă densitatea de repartiție*

$$f(x) = kx^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}}\, dx,\ 0 < x < \infty,\ \gamma > 0.$$

Să se arate că momentul de ordinul r există numai dacă $r < p - 1$ *și este dat de*

$$M_r = \gamma^r \frac{\Gamma(p - r - 1)}{\Gamma(p - 1)}.$$

SOLUȚIE. Din proprietățile densității de repartiție, rezultă că

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = k \int_0^{\infty} x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}}\, dx.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\frac{\gamma}{x} = y$, obținem

$$1 = k \int_0^{\infty} \gamma^{1-p} y^{p-2} e^{-y} dy = k\gamma^{1-p}\, \Gamma(p - 1),$$

de unde rezultă

$$k = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p - 1)}.$$

Momentul de ordinul r este dat de

$$M_r = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)} \int_0^{\infty} x^{r-p} e^{-\frac{\gamma}{x}}\, dx = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)} \int_0^{\infty} \left(\frac{\gamma}{y}\right)^{r-p} e^{-y} \frac{\gamma}{y^2}\, dy =$$

$$= \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p-1)} \int_0^{\infty} y^{p-r-2} e^{-y} dy = \gamma^r \frac{\Gamma(p - r - 1)}{\Gamma(p - 1)}.$$

Din expresia momentului de ordinul r se vede că el există numai dacă $r < p - 1$.

56. *Să se calculeze polinoamele Cebîşev-Hermite pentru o variabilă aleatoare* ξ *a cărei densitate de repartiţie este*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

SOLUŢIE. Facem următoarea notaţie

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \text{ şi } D^r = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}.$$

Avem

$$Df(x) = -xf(x),$$
$$D^2f(x) = (x^2 - 1)f(x),$$
$$D^3f(x) = (3x - x^3)f(x)$$

şi aşa mai departe. Se observă că rezultatul derivării va fi un polinom în x multiplicat cu $f(x)$.

Polinoamele Cebîşev-Hermite $H_r(x)$ sînt definite în felul următor:

$$(-D)^r f(x) = H_r(x)f(x),$$

$H_r(x)$ este un polinom de grad r în x şi coeficientul lui x^r este egal cu unitatea. Prin convenţie $H_0 = 1$.

Avem

$$f(x - t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + tx - \frac{1}{2}t^2\right) = f(x) \exp\left(tx - \frac{1}{2}t^2\right)$$

şi după teorema lui Taylor

$$f(x - t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i D^i f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} H_i(x)f(x).$$

Deci $H_r(x)$ este coeficientul lui $\frac{t^r}{r!}$ din dezvoltarea în serie a lui $\exp\left(tx - \frac{1}{2}t^2\right)$:

$$H_r(x) = x^r - \frac{r^{[2]}}{2 \cdot 1!} x^{r-2} + \frac{r^{[4]}}{2^2 \cdot 2!} x^{r-4} - \frac{r^{[6]}}{2^3 \cdot 3!} x^{r-6} + \cdots$$

Prin urmare

$$H_0 = 1;\ H_1 = x;\ H_2 = x^2 - 1;\ H_3 = x^3 - 3x,$$
$$H_4 = x^4 - 6x^2 + 3;\ H_5 = x^5 - 10x^3 + 15x.$$

57. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare şi*

$$M_\alpha = M_\alpha(\xi) = M(|\xi|^\alpha),$$

unde $\alpha > 0$. *Să presupunem că* $0 < \beta < \alpha$ *și că* $M_\alpha(\xi)$ *este finit. Să se arate că*

$$[M_\beta(\xi)]^{\frac{1}{\beta}} \leqslant [M_\alpha(\xi)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

SOLUȚIE. Fie a și b două numere pozitive și $p > 1$. Punînd $q = \frac{p}{p-1}$, avem

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Atunci se știe că

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Luînd

$$a = \frac{|\xi|^\beta}{(M_\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}},\ b = 1,\ p = \frac{\alpha}{\beta},$$

obținem

$$\frac{|\xi|^\beta}{(M_\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}} \leqslant \frac{|\xi|^\alpha}{M_\alpha} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Luînd valoarea medie, rezultă că

$$\frac{M_\beta}{(M_\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de unde

$$(M_\beta)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant (M_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

58. *Într-un plan un segment de lungime* l *se rotește în diferite moduri, astfel că toate direcțiile sale sînt egal probabile. Segmentul se proiectează pe o axă fixă* AB.

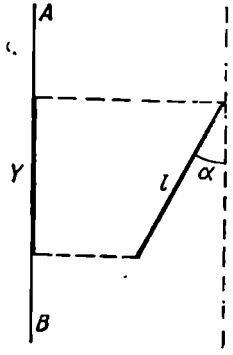


Fig. 22.

Să se determine valoarea medie a lungimii proiecției segmentului pe axa AB.

SOLUȚIE. Lungimea proiecției Y a segmentului l (fig. 22) este

$$Y = l|\cos\alpha|,$$

unde unghiul α este o variabilă aleatoare distribuită uniform pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Densitatea de repartiție a variabilei α este

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

și deci

$$m_y = M[l|\cos\alpha|] = \int_0^{2\pi} l|\cos\alpha|\frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{2l}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = \frac{2l}{\pi}.$$

59. *Schija obținută de la un obuz de tun, care se poate reprezenta schematic sub forma unui segment de lungime l, zboară, rotindu-se în jurul centrului de greutate, astfel că toate orientările în spațiu sînt egal probabile. În drumul său schija întîlnește un ecran plan perpendicular pe direcția ei de mișcare. Să se găsească valoarea medie a lungimii urmei lăsate de schije pe ecran.*

SOLUȚIE. Dăm o formulare matematică a afirmației că „toate orientările schijei în spațiu sînt egal probabile". Direcția segmentului l va fi caracterizată prin vectorul unitar $\vec{r}$ (fig. 23). Direcția acestui vector în sistemul de coordonate sferice (introdus față de planul P, pe care se efectuează proiecția) este determinată de două unghiuri: unghiul θ din planul P și unghiul φ dintr-un plan perpendicular pe P.

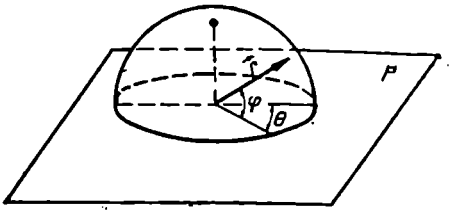


Fig. 23.

Deoarece toate direcțiile vectorului $\vec{r}$ sînt egal probabile, poziția extremității lui pe suprafața C a sferei unitate, trebuie să aibă aceeași densitate de probabilitate; prin urmare elementul de probabilitate $f(\theta, \varphi)\,d\theta d\varphi$, unde $f(\theta, \varphi)$ — densitatea de repartiție a unghiurilor θ și φ — trebuie să fie proporțională cu elementul de arie ds de pe sfera C; acest element de arie este dat de

$$d\theta d\varphi \cos\varphi$$

de unde

$$f(\theta, \varphi)d\theta d\varphi = A\cos\varphi\, d\theta d\varphi;\quad f(\theta, \varphi) = A\cos\varphi,$$

unde A este un coeficient de proporționalitate.

Valoarea coeficientului A se determină din condiția

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \varphi)d\theta\, d\varphi = 1,$$

de unde

$$A = \frac{1}{4\pi}.$$

Astfel densitatea de repartiție a unghiurilor θ și φ se exprimă prin formula

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \cos\varphi, \text{ pentru } \begin{cases} 0 < \theta < 2\pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Proiectăm segmentul l pe planul P; lungimea acestei proiecții este

$$Y = l\cos\varphi.$$

Considerînd Y ca funcție de argumentele θ și φ, găsim

$$m_y = M(l\cos\varphi) = \frac{l}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{l}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{l\pi}{4} \approx 0{,}785\, l.$$

Se vede că urma lăsată de schije pe ecran este aproximativ 0,785 din lungimea ei.

60. *Figura plană de arie S se rotește în spațiu, astfel încît toate orientările sale sînt egal probabile.*

Se cere:

să se găsească valoarea medie a ariei proiecției figurii S pe un plan fix P.

SOLUȚIE. Orientarea figurii S în spațiu este dată de direcția normalei $\vec{N}$ (fig. 24) la această suprafață. Introducem un sistem de coordonate sferice.

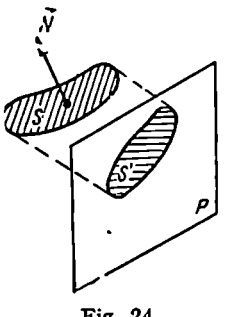


Fig. 24.

Direcția normalei $\vec{N}$ la suprafața S, se caracterizează prin unghiurile variabile θ și φ distribuite cu densitatea obținută în problema precedentă

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\cos\varphi \text{ pentru } \begin{cases} 0 < \theta < 2\pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Aria proiecției figurii S pe planul P, S' este dată de

$$S' = S\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right| = S\,|\sin\varphi|,$$

iar valoarea medie a proiecției este

$$m_{S'} = M(S\,|\sin\varphi|) = \frac{S}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,|\sin\varphi|\,d\varphi = \frac{S}{2}.$$

Rezultă că valoarea medie a proiecției unei figuri plane de orientare variabilă pe un plan fix este egală cu jumătate din aria figurii de orientare variabilă.

61. *În procesul de ochire, punctul, imaginea obiectului țintit, se reține în limitele ecranului radarului. Ecranul are forma unui cerc (C) de rază r. Punctul ocupă pe ecran o poziție întîmplătoare cu o densitate de probabilitate constantă.*

Să se găsească valoarea medie a depărtării punctului de centrul ecranului.

SOLUȚIE. Fie d distanța de la centrul ecranului la punctul $M(\xi, \eta)$ ce reprezintă imaginea țintei. Avem

$$d = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

Densitatea de repartiție a vectorului aleator (ξ, η) este

$$f(x,y) = \begin{cases} A & \text{pentru } x^2+y^2 < r^2, \\ 0 & \text{pentru } x^2+y^2 > r^2. \end{cases}$$

Din condiția

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

rezultă

$$f(x, y) = A = \frac{1}{\pi r^2}$$

de unde

$$M[d(\xi, \eta)] = \iint_{(C)} \mathrm{d}(\xi, \eta) f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{(C)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecînd la coordonatele polare, obținem

$$M[d(\xi, \eta)] = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{2}{3}r.$$

62. *Pe segmentul $\overline{AB}$ de lungime a se iau la întîmplare două puncte M_1 și M_2. Să se afle valoarea medie a variabilei aleatoare $\overline{M_1M_2}^k$.*

SOLUȚIE. Folosim formula lui M. W. Crofton pentru valoarea medie

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v} = \frac{h(m_1 - m)}{V},$$

unde V și m_1 au semnificații analoge cu cele de la problema (105. cap. II)

În cazul nostru această ecuație diferențială se scrie

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a} = \frac{(2m_1 - m)}{a}.$$

Însă

$$m_1 = \frac{1}{a}\int_0^a y^k \mathrm{d}y = \frac{a^k}{k+1}.$$

Vom avea deci

$$\frac{dm}{da} = \frac{2a^{k-1}}{k+1} - \frac{2m}{a}$$

sau

$$a^2 \frac{dm}{da} + 2am = \frac{2a^{k+1}}{k+1}.$$

Cum membrul întîi al acestei ecuații este tocmai derivata produsului a^2m, vom putea scrie

$$\frac{(da^2m)}{da} = \frac{2a^{k+1}}{k+1},$$

care integrată ne conduce la egalitatea

$$a^2m = \frac{2a^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = c,$$

sau încă

$$m = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{c}{a^2}.$$

Însă pentru $a = 0$, valoarea medie m este nulă; deci $c = 0$ și deci

$$m = \frac{2a^k}{(k+1)(k+2)}.$$

Pentru $k = 1$ obținem valoarea medie a variabilei $\overline{M_1M_2}$ care este $\frac{a}{3}$.

63. *În interiorul unui cerc de rază R se iau la întîmplare două puncte M_1 și M_2. Să se afle valoarea medie a variabilei aleatoare $\overline{M_1M_2}$.*

SOLUȚIE. În acest caz formula lui M. W. Crofton se scrie

$$\frac{dm}{ds} = \frac{2(m_1 - m)}{S}.$$

Cum însă $S = \pi R^2$ obținem

$$dm = 4(m_1 - m)\frac{dR}{R},$$

unde m_1 este valoarea medie a variabilei aleatoare $\overline{M_1M_2}$, M_1 fiind situat pe cerc. Dacă luăm sistemul de axe de coordonate astfel încît axa Ox să fie tangentă la cerc în O, ecuația cercului se scrie

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Trecînd la coordonatele polare $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, această formulă se scrie

$$\rho = 2R\sin\varphi.$$

Valoarea medie m_1 este

$$m_1 = \frac{\iint_D \rho\, dS}{\iint_{D_0} dS}.$$

unde D este domeniul interior cercului D_0 iar dS este elementul de arie.

Cum în coordonate polare elementul de arie este $dS = \rho d\rho d\varphi$ iar $\iint_{D_0} dS = \pi R^2$, formula de mai înainte se poate scrie

$$m_1 = \frac{\iint_D \rho^2 d\rho d\varphi}{\pi R^2} = \frac{\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} \rho^2 d\rho}{\pi R^2} = \frac{\frac{32R^3}{9}}{\pi R^2} = \frac{32R}{9\pi}.$$

Cu aceasta ecuația diferențială în m se scrie

$$dm = -4\frac{m dR}{R} + \frac{128\, dR}{9\pi},$$

care se mai poate pune și sub forma

$$d(mR^4) = \frac{128}{9\pi} R^4 dR,$$

care integrată ne dă

$$mR^4 = \frac{128}{45\pi} R^5 + C, \qquad (C = \text{const})$$

adică

$$m = \frac{128R}{45} + \frac{C}{R^4}.$$

Cum pentru $R = 0$ avem $m = 0$, rezultă că $C = 0$ și deci valoarea medie căutată este

$$m = \frac{128\, R}{45\pi}.$$

64. *Spațiul conține într-o distribuție întîmplătoare moleculele de gaz cu densitatea m în domeniul unitate.*

Se cere:

a) *distribuția lungimii drumului unei molecule pînă în momentul ciocnirii ei cu altă moleculă, sau altfel spus, care este parcursul liber al moleculelor?*

b) *valoarea medie a parcursului liber.*

SOLUȚIE. a) Vom reprezenta molecula sub aspectul unei sfere de rază r. Mărimea drumului liber îl notăm, prin x. Problema se referă la determinarea probabilității ca sfera de rază r, începînd să se miște din punctul O, să treacă liberă prin sfera de rază R.

Probabilitatea aceasta se va exprima prin

$$P(X > x).$$

Însă această problemă se reduce la problema ca punctul care se deplasează din punctul inițial să nu intersecteze nici o sferă de rază $\rho = 2r$ din numărul de $\frac{4}{3}\pi R^3 m$, particule arbitrar distribuite în sfera de rază R.

Vom despărți un strat din sfera de rază R, de grosime dR. Acest strat conține $4\pi m R^2 dR$ sfere de rază ρ. Probabilitatea ca o rază arbitrară, plecînd din poziția inițială să nu intersecteze nici o sferă care se găsește într-un strat, este egală cu

$$\left(1 - \frac{\pi\rho^2}{4\pi R^2}\right)^{4\pi R^2 m dR}. \tag{1}$$

Considerînd că mărimea R este mare în comparație cu ρ, (1) se poate exprima ca

$$\exp\,(-\pi\rho^2 m dR).$$

Împărțind toată sfera de rază R în straturi de grosime dR și găsind probabilitatea ca raza să nu intersecteze sferele fiecărui strat, considerăm probabilitatea ca raza să nu intersecteze toate sferele, ca produsul acestor probabilități.

Aceasta dă

$$P(X \geqslant R) = e^{-\pi\rho^2 m R}.$$

De aici, distribuția căutată a mărimii parcursului liber

$$F(x) = P(X < x) = 1 - e^{-\pi r^2 m x}.$$

b) Valoarea medie a parcursului liber este egală cu

$$M(x) = \int_0^\infty x\, dF(x) = \frac{1}{\pi r^2 m}.$$

65. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare a căror funcție generatoare este*

$$\psi(t_1, t_2) = a(e^{t_1+t_2} + 1) + b(e^{t_1} + e^{t_2}),$$

unde a *și* b *sînt două constante, care verifică relația* $2a + 2b = 1$. *Să se calculeze* $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D^2(\xi)$, $D^2(\eta)$, cov (ξ, η).

SOLUȚIE. Avem

$$M(\xi) = \left[\frac{\partial \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right]_{t_1=t_2=0} = (ae^{t_1+t_2} + be^{t_1})_{t_1=t_2=0} = a + b = \frac{1}{2},$$

$$M(\eta) = \left[\frac{\partial \psi(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right]_{t_1=t_2=0} = (ae^{t_1+t_2} + be^{t_2})_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte

$$M_2(\xi) = \left[\frac{\partial^2 \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1^2}\right]_{t_1=t_2=0} = (ae^{t_1+t_2} + be^{t_1})_{t_1+t_2=0} = \frac{1}{2},$$

$$M_2(\eta) = \frac{1}{2}.$$

Atunci

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$D^2(\eta) = \frac{1}{4}.$$

Pentru calculul cov (ξ, η), avem

$$M(\xi \cdot \eta) = \left[\frac{\partial^2 \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right]_{t_1=t_2=0} = (ae^{t_1+t_2})_{t_1=t_2=0} = a$$

Deci

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = a - \frac{1}{4}.$$

66. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare a căror funcție generatoare este*

$$\psi(t_1, t_2) = [a(e^{t_1+t_2} + 1) + b(e^{t_1} + e^{t_2})]^2,$$

unde a *și* b *sînt două constante pozitive astfel încît* $2a + 2b = 1$.

Să se calculeze $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D^2(\xi)$, $D^2(\eta)$ *și* cov (ξ, η).

SOLUȚIE. Avem

$$M(\xi) = \left[\frac{\partial \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right]_{t_1=t_2=0.}$$

Deoarece

$$\frac{\partial \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1} = 2[a(e^{t_1+t_2}+1) + b(e^{t_1}+e^{t_2})](ae^{t_1+t_2} + be^{t_1}),$$

rezultă că

$$M(\xi) = 2(2a + 2b)(a + b).$$

Însă $2a + 2b = 1$, și deci

$$M(\xi) = 1.$$

Analog se găsește

$$M(\eta) = 1.$$

Pentru calculul dispersiilor să găsim mai întîi $M_2(\xi)$ și $M_2(\eta)$. Avem

$$M_2(\xi) = \left[\frac{\partial^2 \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1^2}\right]_{t_1=t_2=0}; \qquad M_2(\eta) = \left[\frac{\partial^2 \psi(t_1 t_2)}{\partial t_2^2}\right]_{t_1=t_2=0}.$$

Cum însă

$$\frac{\partial^2 \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1^2} = 2[a(e^{t_1+t_2}+1) + b(e^{t_1}+e^{t_2})](ae^{t_1+t_2}+be^{t_1}) +$$
$$+ 2(ae^{t_1+t_2}+be^{t_1})(ae^{t_1+t_2}+be^{t_1}),$$

găsim

$$M_2(\xi) = 2(2a + 2b)(a + b) + 2(a + b)(a+ b) = \frac{3}{2}.$$

Analog

$$M_2(\eta) = \frac{3}{2}.$$

Prin definiție

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi),$$

de unde

$$D^2(\xi) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Analog

$$D^2(\eta) = M_2(\eta) - M^2(\eta) = \frac{1}{2}.$$

Să calculăm acum $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$,

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi)\, M(\eta).$$

Avem

$$M(\xi, \eta) = \left[\frac{\partial^2 \psi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right]_{t_1=t_2=0}.$$

Însă

$$\frac{\partial^2\psi(t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} = 2(ae^{t_1+t_2} + be^{t_2})(ae^{t_1+t_2} + be^{t_1}) + 2[a(e^{t_1+t_2} + 1) + be^{t_1+t_2}]ae^{t_1+t_2}.$$

Deci

$$M(\xi\cdot\eta) = 2(a+b)(a+b) + 2(2a+2b)a = 2a + \frac{1}{2}.$$

Prin urmare

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 2a + \frac{1}{2} - 1 = 2a - \frac{1}{2}.$$

67. *Fie ξ și η două variabile aleatoare a căror densitate de repartiție comună este dată de expresia*

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{dacă } \min(x, y) \geqslant 0, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Se cere:

a) *Să se afle densitățile de repartiție marginale.*

b) *Momentele de primele patru ordine.*

c) *Funcția caracteristică a vectorului aleator* (ξ, η).

SOLUȚIE. a) Prin definiție

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dy = \int_0^\infty e^{-(x+y)}\,dy = e^{-x}.$$

Deci

$$f_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Analog avem:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

b) $M(\xi) = \int_0^\infty\int_0^\infty xe^{-(x+y)}\,dx\,dy = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx\int_0^\infty e^{-y}dy = \Gamma(2) = 1,$

Deci $M(\xi) = 1$. Analog $M(\eta) = 1$

$$M(\xi\cdot\eta) = \int_0^\infty\int_0^\infty xye^{-(x+y)}\,dx\,dy = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx\int_0^\infty ye^{-y}dy = 1,$$

$$M(\xi^2) = \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx\int_0^\infty e^{-y}\,dy = \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$$

Analog $M(\eta^2) = 2!$,

$$M(\xi^2 \cdot \eta) = M(\xi \cdot \eta^2) = 2!\ 1!,$$

$$M(\xi^3) = M(\eta^3) = 3!,$$

$$M(\xi^3 . \eta) = M(\xi \cdot \eta^3) = 3!\ 1!,$$

$$M(\xi^2 \cdot \eta^2) = 2!\ 2!,$$

$$M(\xi^4) = M(\eta^4) = 4!$$

În general

$$M(\xi^k . \eta^l) = k!\ l!;\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

c) $\varphi_{\xi,\eta}(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(sx+ty)} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{i(sx+ty)}\, e^{-(x+y)}dxdy =$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(1-is)x}dx \int_0^{\infty} e^{-(1-it)y}\,dy = \frac{1}{1-is}\cdot\frac{1}{1-it},$$

$$\varphi_{\xi,\eta}(s,\ t) = (1 - is)^{-1}.(1 - it)^{-1}$$

Observație. Se vede imediat că variabilele ξ și η sînt independente.

68. *Fie*

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \min(x,\ y) < 0, \\ xye^{-(x+y)}, & \text{dacă } \min(x,\ y) \geqslant 0. \end{cases}$$

Se cere:
a) $F_{\xi,\eta}(x,\ y)$, $F_{\xi}(x)$, $F_{\eta}(y)$, $f_{\xi}(x)$, $f_{\eta}(y)$,
b) *Funcția caracteristică a vectorului* $(\xi,\ \eta)$,
c) *Momentele de diferite ordine.*

SOLUȚIE. a) Prin definiție

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,\ v)\,dudv = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \min(x,\ y) < 0, \\ \int_0^x\int_0^y uv\,e^{-(u+v)}\,dudv, & \text{dacă } \min(x,\ y) \geqslant 0. \end{cases}$$

Urmează deci, că

$$F_{\xi,\eta}(x,\ y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \min(x,\ y) < 0, \\ [1 - (1 + x)e^{-x}][1-(1+y)e^{-y}] & \text{dacă } \min(x,\ y) \geqslant 0. \end{cases}$$

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0, \\ 1-(1+x)e^{-x}, & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Analog

$$F_{\eta}(y) = \lim_{x\to\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y < 0, \\ 1 - (1+y)e^{-y}, & \text{dacă } y \geqslant 0. \end{cases}$$

De aici rezultă imediat că

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0, \\ xe^{-x}, & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y < 0, \\ ye^{-y}, & \text{dacă } y \geqslant 0. \end{cases}$$

b) Din definiția funcției caracteristice, rezultă

$$\varphi_{\xi,\eta}(s, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(sx+ty)} xye^{-(x+y)} dxdy = \int_0^\infty xe^{-(1-is)x} dx \int_0^\infty ye^{-(1-it)y} dy,$$

de unde

$$\varphi_{\xi,\eta}(s, t) = (1 - is)^{-2} \cdot (1 - it)^{-2}.$$

c) Folosind fie definiția momentelor de diferite odine, exprimate cu ajutorul densității de repartiție, fie cu ajutorul funcției caracteristice, găsim

$$M(\xi^k, \eta^l) = (k + 1)! \ (l + 1)!$$

Observație. Se vede imediat că variabilele ξ și η sînt independente.

69. *Fie ξ_1 și ξ_2 două variabile aleatoare independente, repartizate normal cu $M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0$ și $D^2(\xi_1) = D^2(\xi_2) = \sigma^2$.*

Să se arate că variabila $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ are densitatea de repartiție

$$g(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

Să se calculeze $m(\eta)$ și $D^2(\eta)$.

SOLUȚIE. Pentru repartiția vectorului aleator (ξ_1, ξ_2) putem scrie

$$f(x, y)\,dxdy = f_1(x) f_2(y)\,dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)} dxdy.$$

Prin schimbarea

$$\xi_1 = \rho \cos\theta,$$

$$\xi_2 = \rho \sin\theta,$$

trecem de la (ξ_1, ξ_2) la (ρ, θ).

Ca să aflăm repartiția variabilei aleatoare η trebuie să găsim repartiția marginală a variabilei ρ.

Din schimbarea făcută pentru variabilele ξ_1 și ξ_2 deducem

$$x = z \cos\theta$$

$$y = z \sin\theta,$$

și deci

$$f(x, y)\,dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}\,dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \left|\frac{D(x,y)}{D(z,0)}\right| dzd\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, z.e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dzd\theta.$$

Atunci densitatea de repartiție a lui η va fi

$$g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi} ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dzd\theta = \frac{z}{\sigma^2}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz.$$

De aici urmează

$$M(\eta) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz = \sqrt{2}\,\sigma\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$M(\eta^2) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty} z^3\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,dz = 2\sigma^2\int_0^{\infty} ye^{-y}\,dy = 2\,\sigma^2.$$

Și deci

$$D^2(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = 2\sigma^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

70. *Dacă $f(x)$ este o densitate de repartiție, atunci pentru A constant, să se arate că :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x - A|\, f(x)\,dx$$

este minimă atunci cînd $A = m_e$, unde m_e este mediana variabilei aleatoare ξ.

SOLUȚIE. Mediana m_e a unei variabile aleatoare continue este definită de

$$\int_{-\infty}^{m_e} f(x)\,dx = \int_{m_e}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x - A|\, f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{A} (A - x)\, f(x)\,dx + \int_{A}^{\infty} (x - A)\, f(x)\,dx$$

sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x - A|\, f(x)\,dx = 2A\int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx - 2\int_{-\infty}^{A} xf(x)\,dx - A + M(\xi) = \Phi.$$

Pentru a vedea pentru ce valoare expresia Φ este minimă, diferențiem în raport cu A și egalăm cu zero

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = 2Af(A) + 2\int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx - 2Af(A) - 1 = 0,$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

și deci A este mediana m_e a variabilei aleatoare ζ.

71. *Fie $f(x)$ o densitate de repartiție cu dispersia finită σ^2 și astfel încît $f(x) \ln f(x)$ este sumabilă ($x \ln x$ este definită în așa fel încît pentru $x = 0$ să fie zero). Să se arate că*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x)\,dx \geqslant \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

cu egal dacă și numai dacă $f(x)$ este egală aproape peste tot cu o densitate normală

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

SOLUȚIE. Deoarece $f(x)$ este o densitate de repartiție cu dispersia finită, avem

$$f(x) \geqslant 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = m,\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx = \sigma^2.$$

Atunci după inegalitățile cunoscute între media armonică, geometrică și aritmetică, pentru orice funcție $g(x)$, $g(x) \geqslant 0$, avem

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx\right)^{-1} \leqslant \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln g(x)\,dx\right\} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ g(x)\ dx.$$

Să notăm densitatea de repartiție a legii normale cu $N(x)$.

Punînd $g(x) = N(x)/f(x)$ în ultima inegalitate, sau $g(x) = \dfrac{f(x)}{N(x)}$ în prima egalitate din (1), obținem un rezultat din care inegalitatea cerută rezultă ușor.

Egalitatea se păstrează dacă și numai dacă $g(x) = C$ (o constantă) aproape peste tot. Dar din relațiile de normalizare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x)\ dx,$$

găsim $C = 1$.

72. *Fie* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *n variabile aleatoare urmînd o aceeași repartiție. Să se arate că*

$$\text{a) } M\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} M(\xi_k\xi_j),$$

$$\text{b) } D^2\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j).$$

SOLUȚIE. a) Avem

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_k\,\xi_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\xi_k\,\xi_j + \xi_k^2 + \sum_{j=k+1}^{n}\xi_k\,\xi_j\right).$$

Pe de altă parte

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\xi_k\,\xi_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\xi_k\,\xi_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\xi_k\,\xi_j$$

De unde

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\xi_k\,\xi_j.$$

Luînd valoarea mediei, obținem

$$M\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} M(\xi_k\,\xi_j).$$

b) Din definiția dispersiei, rezultă

$$D^2\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = M\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k)\right]^2.$$

Însă

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M(\xi_k))\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\xi_k - M(\xi_k)]\,[\xi_j - M(\xi_j)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}[\xi_k - M(\xi_k)]\,[\xi_j - M(\xi_j)] + [\xi_k - M(\xi_k)]^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k+1}^{n}[\xi_k - M(\xi_k)]\,[\xi_j - M(\xi_j)]\right\} = \sum_{k=1}^{n}[\xi_k - M(\xi_k)]^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}[\xi_k - M(\xi_k)]\,[\xi_j - M(\xi_j)].$$

Luînd valoarea medie se obține egalitatea *b*).

73. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare independente. Să se arate că:*

$$D^2(\xi\eta) = D^2(\xi)\, D^2(\eta) + M^2(\xi)\, D^2(\eta) + M^2(\eta)\, D^2(\xi).$$

SOLUȚIE. Prin definiție

$$D^2(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [xy - M(\xi \cdot \eta)]^2 f(x, y)\, dx dy.$$

Deoarece ξ și η sînt variabile independente, urmează că

$$D^2(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [xy - M(\xi)\, M(\eta)]^2 g(x)\, h(y)\, dx dy,$$

unde am notat prin $g(x)$ și $h(y)$ densitățile de repartiție ale variabilelor ξ și respectiv η

$$D^2(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2y^2 - 2xy\, M(\xi)\, M(\eta) + M^2(\xi)\, M^2(\eta)]\, g(x)\, h(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 h(y)\, dy - 2M(\xi)\, M(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} yh(y)\, dy +$$

$$+ M^2(\xi)\, M^2(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\, dy.$$

Cum

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - M^2(\xi);\ D^2(\eta) = M_2(\eta) - M^2(\eta),$$

rezultă că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\, dx = D^2(\xi) + M^2(\xi) \text{ și } \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 h(y)\, dy = D^2(\eta) + M^2(\eta).$$

Deci

$$D^2(\xi \cdot \eta) = [D^2(\xi) + M^2(\xi)]\ [D^2(\eta) + M^2(\eta)] - M^2(\xi)\, M^2(\eta),$$

de unde

$$D^2(\xi \cdot \eta) = D^2(\xi)\, D^2(\eta) + D^2(\xi)\, M^2(\eta) + D^2(\eta)\, M^2(\xi).$$

74. *Densitatea de repartiție* $f(x)$ *a variabilei aleatoare* ξ *este o curbă simetrică în raport cu axa* y^{-lor} *în intervalul* $(-\pi, \pi)$.

Să se arate că

$$D^2(\xi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\pi \sum \frac{1}{n^2} (-1)^n a_n,$$

unde a_n *este coeficientul din dezvoltarea în serie Fourier a funcției* $f(x)$.

SOLUȚIE. Fie dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(x)$.

$$f(x) = C\,(1 + \sum a_n \cos nx).$$

Din proprietățile densității de repartiție, rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

de unde

$$C = \frac{1}{2\pi}.$$

Deoarece $f(x)$ este o funcție pară, avem

$$M(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

și

$$M(\xi^2) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x + \sum a_n \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi^2}{3} + 4\pi \sum \frac{(-1)^n}{n^2} a_n.$$

Deoarece $D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$, rezultă că

$$D^2(\xi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\pi \sum \frac{1}{n^2}(-1)^n a_n.$$

75 *Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiție este $f(x)$. Să se arate că*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - A)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

este minimă pentru $A = M(\xi)$.

SOLUȚIE. : Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - A)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi) + M(\xi) - A)^2 f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} [M(\xi) - A]^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Însă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [M(\xi) - A]^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [M(\xi)) - A]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = [M(\xi) - A]^2,$$

de unde rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-A)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(\xi)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x + [M(\xi)-A]^2.$$

Deci, pentru ca $\int_{-\infty}^{+\infty}(x-A)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ să fie minimă trebuie ca $M(\xi)=A$.

76. *Să se demonstreze că dispersia $D^2(\xi)$ a variabilei aleatoare ξ nu poate întrece pătratul semidiferenței dintre valorile ei extreme.*

Să se găsească condiția pentru care această limită superioară să fie atinsă.

SOLUȚIE. Fie

$$a = \sup_{\omega\in\Omega}\xi(\omega) \quad \text{și} \quad b = \inf_{\omega\in\Omega}\xi(\omega).$$

Atunci putem scrie

$$\int_\Omega \left(\xi(\omega) - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}P(\omega) = \int_\Omega \Big[(\xi(\omega) - M(\xi)) +$$

$$+ \left(M(\xi) - \frac{a+b}{2}\right)\Big]^2 \mathrm{d}P(\omega) = \int_\Omega (\xi(\omega) - M(\xi))^2\,\mathrm{d}P(\omega) +$$

$$+ \left(M(\xi) - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Urmează de aici că avem îndeplinită inegalitatea

$$D^2(\xi) = \int_\Omega (\xi(\omega) - M(\xi))^2\,\mathrm{d}P(\omega) \leqslant \int_\Omega \left(\xi(\omega) - \frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}P(\omega)$$

și deci că

$$D^2(\xi) \leqslant \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Avem egalitatea dacă

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}.$$

77. *Fie ξ și η două variabile aleatoare. Să se arate că:*

a) $\operatorname{cov}(a\xi, b\eta) = ab \operatorname{cov}(\xi, \eta)$.

b) $\operatorname{cov}(\xi+\eta, \beta) = \operatorname{cov}(\xi, \beta) + \operatorname{cov}(\eta, \beta)$.

c) $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$.

d) $\operatorname{cov}(\xi+\eta, \xi+\eta) = \operatorname{cov}(\xi, \xi) + \operatorname{cov}(\eta, \eta) + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$.

SOLUȚIE. a) Din definiția corelației, avem

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M[(\xi - m_1)(\eta - m_2)].$$

sau, în cazul de față

$$\operatorname{cov}(a\xi, b\eta) = M[a(\xi - m_1)\, b(\eta - m_2)] = abM(\xi - m_1)(\eta - m_2) = ab \operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

b) Fie β o variabilă aleatoare. Atunci

$$\operatorname{cov}(\xi + \eta, \beta) = M\{[(\xi + \eta) - (m_1 + m_2)](\beta - m_3)\} = M\{[(\xi - m_1) + (\eta - m_2)](\beta - m_3)\} = M[(\xi - m_1)(\beta - m_3) + (\eta - m_2)(\beta - m_3)].$$

Însă valoarea medie a unei sume este egală cu suma valorilor medii. Deci

$$\operatorname{cov}(\xi + \eta, \beta) = M(\xi - m_1)(\beta - m_3) + M(\eta - m_2)(\beta - m_3) = \operatorname{cov}(\xi, \beta) + \operatorname{cov}(\eta, \beta).$$

c) Deoarece operația de înmulțire este comutativă, se obține

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M[(\xi - m_1)(\eta - m_2)] = M[(\eta - m_2)(\xi - m_1)] = \operatorname{cov}(\eta, \xi).$$

d) $\operatorname{cov}(\xi + \eta, \xi + \eta) = M\{[(\xi - m_1) + (\eta - m_2)]\}^2 =$

$$= M[(\xi - m_1)(\xi - m_1)] + M[(\eta - m_2)(\eta - m_2)] + 2M[(\xi - m_1)(\eta - m_2)] = \operatorname{cov}(\xi, \xi) + \operatorname{cov}(\eta, \eta) + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

78. *Să se arate că dacă*

$$\rho(\xi, \eta) = 0$$

nu rezultă că variabilele aleatoare ξ *și* η *sînt independente.*

SOLUȚIE. Coeficientul de corelație $\rho(\xi, \eta)$ are expresia

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) M(\eta)}{D(\xi) D(\eta)},$$

unde $D^2(\xi)$ și $D^2(\eta)$ sînt dispersiile variabilelor ξ respectiv η.

Dacă

$$\rho(\xi, \eta) = 0$$

rezultă că

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) M(\eta).$$

Cu alte cuvinte

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x) \cdot g(y) dxdy,$$

unde am notat cu $f(x, y)$ densitatea de repartiție bidimensională a vectorului aleator (ξ, η), iar $f(x)$ respectiv $g(y)$ sînt densitățile de repartiție ale variabilei ξ respectiv η.

Rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy[f(x, y) - f(x).g(y)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

De aici nu urmează însă că

$$f(x, y) = f(x).g(y)$$

deci cele două variabile nu sînt independente.

79. *Se știe că:*

Dacă două variabile aleatoare sînt independente, atunci ele sînt necorelate.

Reciproc, nu este totdeauna adevărat, lucru dovedit prin problema numărul 78.

Dacă două variabile aleatoare au o repartiție comună gaussiană și sînt necorelate, atunci ele sînt independente.

Există însă două variabile aleatoare necorelate, fiecare din ele fiind gaussiană și totuși dependente.

SOLUȚIE. Fie $a = \frac{1}{4\pi}\, e^{-4}$ așa că pentru orice $(x, y) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ avem

$$0 < a < \frac{1}{2\pi}\, .e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

Fie $f: R \times R \to R$ definită prin relațiile:

$$f(x, y) = \begin{cases} a & \text{dacă } 1 < |x| < 2 \text{ și } 1 < |y| < 2 \\ & \text{sau dacă } 0 < |x| < 1 \text{ și } 0 < |y| < 1 \\ -a & \text{dacă } 1 < |x| < 2 \text{ și } 0 < |y| < 1 \\ & \text{sau dacă } 0 < |x| < 1 \text{ și } 1 < |y| < 2 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Fie acum $p : R \times R \to R$ definită prin relația

$$p(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{2\pi}\, .e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

După cum am ales funcția $f(x, y)$ rezultă că

$$p(x, y) \geqslant 0, \quad (x, y) \in R \times R$$

și după un calcul imediat rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

așa că $p(x, y)$ reprezintă o densitate de repartiție.

Considerăm acum două variabile aleatoare ξ și η a căror densitate de repartiție comună este tocmai $p(x, y)$.

Dacă $p_\xi(x)$ este densitatea de repartiție a variabilei ξ, iar $p_\eta(y)$ a variabilei aleatoare η, atunci

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

și deci atît ξ cît și η urmează legi normale $N(0, 1)$.

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

de unde rezultă că variabilele ξ și η sînt necorelate.

Dacă variabilele aleatoare ξ și η ar fi independente atunci densitatea de repartiție comună ar fi $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ care contrazice faptul că densitatea de repartiție comună a variabilelor ξ și η este

$$p(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Prin urmare ξ și η sînt dependente.

80. *Fie ξ și η două variabile aleatoare și $\rho(\xi, \eta)$ coeficientul lor de corelație. Să se arate că prin schimbarea liniară*

$$u = a + b\xi, \quad v = c + \mathrm{d}\,\eta.$$

coeficientul de corelație nu se modifică, adică

$$\rho(\xi, \eta) = \rho(u, v).$$

SOLUȚIE. Calculăm coeficientul de corelație al variabilelor u și v. Avem

$$\rho(u, v) = \frac{M[u - M(u)][v - M(v)]}{D(u)\,D(v)}$$

sau ţinînd seama de valorile lui u şi v

$$\rho(u,v)=\frac{M[a+b\xi-(a+bM(\xi))]\ [c+d\eta-(c+dM(\eta))]}{bD(\xi)\,dD(\eta)}=\frac{bd\,M[\xi-M(\xi)]\ [\eta-M(\eta)]}{bd\ D(\xi)\ D(\eta)}.$$

De unde, făcînd simplificările posibile, rezultă

$$\rho(u,\ v)=\rho(\xi,\ \eta).$$

81. *Fie* $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ *variabile aleatoare independente ce au aceeaşi dispersie. Se formează funcţiile liniare*

$$l=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\xi_i \text{ şi } m=\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i.$$

Să se arate că condiţia ca $\rho(l,\ m)=0$ este $\sum_{i=1}^{n} a_i\,b_i=0.$

SOLUŢIE. Presupunem că

$$\rho(l,\ m)=\frac{M[l-M(l)][m-M(m)]}{D(l)\ D(m)}=0,$$

care se mai poate scrie

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\,\xi_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\,\lambda_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i\,\xi_i-\sum_{i=1}^{n} b_i\,\lambda_i\right]=0,$$

unde am notat prin λ_i, valoarea medie a variabilei ξ_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Avem

$$0=M[\sum a_i(\xi_i-\lambda_i)]\ [\sum b_i\,(\xi_i-\lambda_i)]=M[a_1\,(\xi_1-\lambda_1)+$$
$$+\ \ldots+a_n\ (\xi_n-\lambda_n)]\ [b_1(\xi_1-\lambda_1)+\ \ldots+b_n(\xi_n-\lambda_n)]=$$
$$=(a_1\,b_1+a_2\,b_2+\ \ldots+a_n\ b_n)\,D^2(\xi)+\sum_{i\neq j}[a_i\,(\xi_i-\lambda_i)\,b_j\,(\xi_j-\lambda_j)].$$

Deoarece variabilele ξ_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ sînt independente urmează că

$$M[a_i\,(\xi_i-\lambda_i)\,b_j\,(\xi_j-\lambda_j)]=0,$$

şi deoarece $D^2(\xi)>0$, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i=0.$$

82. *Fie* ξ *şi* η *două variabile aleatoare.* ξ *urmează o lege normală* $N(0,\ 1)$, *iar* η *pentru o valoare* x *fixată a variabilei* ξ, *are densitatea de probabilitate*

$$\frac{1}{2}\,e^{-\alpha|y|}\,\alpha,\ \textit{unde}\ \alpha=(1+x^2)/2\ \textit{şi}\ -\infty<y<\infty.$$

Se cere: a) *Să se găsească probabilitatea elementară a perechei* (ξ, η), *repartiția marginală a variabilei aleatoare* η *și funcția de repartiție corespunzătoare.*

b) ξ *fiind fixată, să se calculeze dispersia variabilei aleatoare* η.

c) *Pentru o valoare fixă* $x(y)$ *a variabilei* ξ (η), *care este lungimea cea mai mică* $l(L)$ *a intervalului valorilor lui* $\eta(\xi)$ *având o probabilitate totală fixată* $1 - \varepsilon$? l *este funcția de* x *și de* ε. *Să se calculeze valoarea medie a intervalului* l.

SOLUȚIE. Avem

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x),$$

de unde

$$f(x, y)\, dx dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-\frac{1+x^2}{2}|y|}\, \frac{1+x^2}{2}\, dx dy$$

sau

$$f(x, y)\, dx dy = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}(1+|y|)}\, e^{-\frac{|y|}{2}}\, \frac{(1+x^2)}{2}\, dx dy. \tag{1}$$

Pentru a găsi repartiția marginală a variabilei aleatoare η vom integra probabilitatea elementară (1) în raport cu x de la $-\infty$ la ∞

$$f_2(y)\, dy = \frac{e^{-\frac{|y|}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+|y|)}\, \frac{(1+x^2)}{2}\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{e^{-\frac{|y|}{2}}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+|y|)}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2}(1+|y|)}\, dx \right) dy.$$

Punînd $x\sqrt{1+|y|} = t$, obținem

$$f_2(y)\, dy = \frac{e^{-\frac{|y|}{2}}}{4} \left(\frac{1}{(1+|y|)^{1/2}} + \frac{1}{(1+|y|)^{3/2}} \right) dy,$$

sau

$$f_2(y)\, dy = \frac{e^{-\frac{|y|}{2}}}{4\sqrt{1+|y|}} \left(1 + \frac{1}{1+|y|} \right) dy.$$

În calcularea funcției de repartiție $F(y)$, ne vom limita numai la valorile pozitive ale variabilei η, deoarece legea de mai înainte este simetrică.

Pentru $y > 0$, avem

$$F(y) - F(0) = \frac{1}{4} \int_0^y \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{1+u}} \left(1 + \frac{1}{1+u} \right) du = \frac{1}{4} \int_0^y \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{(1+u)^{1/2}}\, du +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^y \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{(1+u)^{3/2}}\, du.$$

Calculînd a doua integrală prin părți, obținem

$$\frac{1}{4}\int_0^v \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{(1+u)^{3/2}}\,du = \frac{-e^{-\frac{u}{2}}(1+u)^{-\frac{1}{2}}}{2}\Bigg|_0^v - \frac{1}{4}\int_0^v \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{(1+u)^{1/2}}\,du$$

de unde

$$F(y) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}\,(1+u)^{-\frac{1}{2}}.$$

Deoarece legea este simetrică : $F(0) = \frac{1}{2}$ și pentru $y < 0$, $F(y) = 1 - F(-y)$. Urmează că

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}(1+y)^{-\frac{1}{2}} & \text{dacă } y \geqslant 0, \\ \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}} & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

b) Pentru o valoare a lui ξ fixată, valoarea medie a variabilei η există, deoarece integrala care o definește este convergentă (datorită termenului $e^{-|y|}$), iar din simetria repartiției rezultă că este nulă.

Avem

$$D^2_{y|x}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y|x)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha y^2\, e^{-\alpha|y|}\,dy.$$

Integrînd prin părți obținem :

$$D^2_{y|x}(x) = \frac{2}{\alpha^2}$$

sau ținînd seama de valoarea lui α

$$D^2_{y|x}(x) = \frac{8}{(1+x^2)^2}.$$

c) Funcția $f(y|x)$ este simetrică în raport cu originea, strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și descrescătoare pe $[0, \infty)$. Intervalul căutat de lungime l este deci simetric în raport cu originea și astfel ca

$$F\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,x\right) - F\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,x\right) = 1 - \varepsilon.$$

Pentru $y > 0$ avem

$$F(y|x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_0^v e^{-\alpha u}\,\alpha\,du,$$

de unde

$$F(y|x) = \frac{1}{2}[1 - e^{-\alpha y}] + \frac{1}{2}.$$

Pentru $y < 0$

$$F(y|x) = \frac{1}{2} e^{-\alpha y},$$

l este dat de ecuația

$$1 - \varepsilon = 1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha \frac{l}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\alpha \frac{l}{a}},$$

$$\varepsilon = e^{-\alpha \frac{l}{2}}, \text{ sau } l = -\frac{2}{\alpha} \ln \varepsilon, \text{ unde } \alpha = \frac{1 + x^2}{2}.$$

Se observă că pentru $\varepsilon = 0$, $l = \infty$ și $l = 0$ pentru $\varepsilon = 1$.
Repartiția marginală a lui ξ fiind normală $N(0, 1)$, rezultă că

$$M(l) = -\frac{4 \ln \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1 + x^2} \, dx.$$

Vom calcula această integrală cu ajutorul reziduurilor, integrînd funcția $f(z) = \dfrac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + z^2}$ pe conturul din fig. 25.

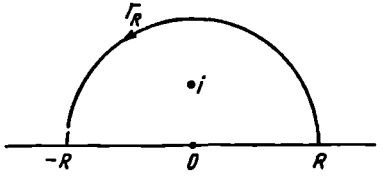


Fig. 25.

$$\int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Rez} f(i).$$

$$\operatorname{Rez} f(i) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{\sqrt{e}}{2i}.$$

Cînd $R \to \infty$, $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \to 0$.

Obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{1 + x^2} dx = \frac{2i\pi\sqrt{e}}{2i} = \pi\sqrt{e},$$

de unde

$$M(l) = -4\sqrt{\frac{\pi e}{2}} \ln \varepsilon.$$

Repartiția marginală a variabilei η este simetrică și densitatea sa de repartiție este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$ ca produs de funcții strict

descrescătoare. Intervalul de lungime L este deci simetric în raport cu originea astfel încît (ținînd seama de a)

$$1 - \varepsilon = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{L}{4}}\left(1+\frac{L}{2}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{L}{4}}\left(1+\frac{L}{2}\right)^{-1/2}$$

sau

$$\varepsilon = e^{-\frac{L}{4}}\left(1+\frac{L}{2}\right)^{-1/2},$$

de unde

$$\ln\varepsilon = -\frac{L}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{L}{2}\right). \tag{2}$$

Pe $[0, \infty)$ funcția $\frac{L}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{L}{2}\right)$ este pozitivă și strict crescătoare. Deci pentru toți ε, (2) admite o soluție și numai una. Se observă că pentru $\varepsilon = 1$, $L = 0$, iar pentru $\varepsilon = 0$, $L = \infty$.

83. *Fie A și B două evenimente din K. Se știe că*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ dacă } P(A) \neq 0.$$

Ce devine această formulă în cazul în care $P(A) = 0$ (adică A este un eveniment aproape imposibil).

SOLUȚIE. Se observă imediat că dacă $P(A) = 0$, atunci $P(A \cap B) = 0$. Într-adevăr

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \geqslant P(A \cap B),$$

deci afirmația făcută.

În acest caz raportul $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ se prezintă sub forma unei nedeterminări de tipul $\frac{0}{0}$.

Vom examina un caz particular și anume:

Fie ξ o variabilă aleatoare care admite densitatea de repartiție $f(x)$. Dacă $A = (\omega : \xi(\omega) = x)$ și B este un eveniment arbitrar, să notăm cu $P(B/x) = P(B/A)$.

Cum $f(x)$ este continuă, rezultă că $P(A) = 0$.

Pentru a calcula $P(B/x)$ să introducem evenimentul A_x — dat de

$$A_x = (\omega : a < \xi(\omega) < x),\ a \in R,\ a < x,$$

A_x este un eveniment variabil cu x, iar $P(A_x \cap B)$ este o funcție nedescrescătoare de x, pentru B fixat.

Din relația cunoscută

$$P(C) = \int_a^b P(C/x) f(x)\,dx,$$

obținem

$$P(A_x \cap B) = \int_a^x f(u) P(B/u) \mathrm{d}u.$$

Prin derivare, obținem acum imediat

$$P(B/x) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P(A_x \cap B)}{f(x)}.$$

84. *Fie* $\{\Omega, K, P\}$ *un cîmp de probabilitate complet aditiv,* $(A_n)_{n \in N} \subset K$ *și* $(\xi_n)_{n \in N}$ *un șir de variabile aleatoare definite în felul următor*

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{dacă} \quad \omega \in A_n, \\ -\alpha & \text{dacă} \quad \omega \in A_n. \end{cases}$$

Să se arate că avem

$$\int_\Omega \xi_k(\omega) \cdot \xi_m(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) = P(A_k \cap A_m) - \alpha [P(A_k) + P(A_m)] + \alpha^2.$$

SOLUȚIE. Scriem pe $\Omega = A_k \cup A_k^c$. Atunci

$$\int_\Omega \xi_k(\omega) \cdot \xi_m(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) = \int_{A_k} \xi_k(\omega) \, \xi_m(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) + \int_{A_k^c} \xi_k(\omega) \, \xi_m(\omega) \mathrm{d}P(\omega) =$$

$$= (1 - \alpha) \int_{A_k} \xi_m(\omega) \mathrm{d}P(\omega) - \alpha \int_{A_k^c} \xi_m(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega). \tag{1}$$

Putem scrie

$$A_k = A_k \cap (A_m \cup A_m^c) = (A_k \cap A_m) \cup (A_k \cap A_m^c),$$
$$A_k^c = A_k^c \cap (A_m \cup A_m^c) = (A_k^c \cap A_m) \cup (A_k^c \cap A_m^c).$$

Expresia (1) devine

$$(1 - \alpha) \int_{A_k \cap A_m} \zeta_m(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) + (1 - \alpha) \int_{A_k \cap A_m^c} \xi_m(\omega) \mathrm{d}P(\omega) -$$

$$- \alpha \int_{A_k^c \cap A_m} \xi_m(\omega) \mathrm{d}P(\omega) - \alpha \int_{A_k^c \cap A_m^c} \xi_m(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) = (1-\alpha)^2 P(A_k \cap A_m) -$$

$$- \alpha (1 - \alpha) P(A_k \cap A_m^c) - \alpha (1 - \alpha) P(A_k^c \cap A_m) - \alpha^2 P(A_k^c \cap A_m^c) =$$

$$= P(A_k \cap A_m) - \alpha [2P(A_k \cap A_m) + P(A_k \cap A_m^c) + P(A_k^c \cap A_m)] +$$

$$+ \alpha^2 [P(A_k \cap A_m) + P(A_k \cap A_m^c) + P(A_k^c \cap A_m) + P(A_k^c \cap A_m^c)] =$$

$$= P(A_k \cap A_m) - \alpha [P(A_k) + P(A_m)] + \alpha^2.$$

85. *Se știe că variabila aleatoare* $\xi \leqslant A$ *și* $M(\xi) = 0$. *Să se arate că:*

$$P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}) < \frac{1}{1+t^2} \quad \text{dacă } A > 0,$$

$$P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}) > \frac{1}{1+t^2} \quad \text{dacă } A < 0.$$

SOLUȚIE. Din $M(\xi) = 0$, deducem

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega) = \int_{\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}} \xi(\omega)\, dP(\omega) + \int_{\{\omega : \xi(\omega) \geqslant -At^2\}} \xi(\omega)\, dP(\omega) = 0,$$

adică

$$\int_{\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}} \xi(\omega)\, dP(\omega) = -\int_{\{\omega : \xi(\omega) \geqslant -At^2\}} \xi(\omega)\, dP(\omega).$$

Însă $\xi(\omega) \leqslant A$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$, sau $-\xi(\omega) \geqslant -A$.
Deci

$$\int_{\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}} \xi(\omega)\, dP(\omega) \geqslant -A \int_{\{\omega : \xi(\omega) \geqslant -At^2\}} dP(\omega) = -AP(\{\omega : \xi(\omega) \geqslant -At^2\})$$

$$-At^2\ P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}) > -A(1 - P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\})).$$

Prin urmare

$$A(1+t^2)\ P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}) < A,$$

de unde

$$P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}) < \frac{1}{1+t^2} \quad \text{dacă } A > 0$$

și

$$P(\{\omega : \xi(\omega) < -At^2\}) > \frac{1}{1+t^2} \quad \text{dacă } A < 0.$$

86. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare și* f *o funcție Borel nenegativă definită pe* R; *dacă* f *este pară și nedescrescătoare pe* $[0, +\infty)$, *să se arate că pentru orice* $a \geqslant 0$, *avem*

$$\frac{M_f(\xi) - f(a)}{\sup f(a)} \leqslant P(|\xi| \geqslant a) \leqslant \frac{M_f(\xi)}{f(a)}.$$

SOLUȚIE. Se observă că dacă f este nedescrescătoare pe R, termenul din mijloc poate fi înlocuit cu $P(\xi \geqslant a)$, unde a este un număr arbitrar.

Deoarece f este o funcție Borel pe R, urmează că $f(\xi)$ este o funcție măsurabilă pe Ω și deoarece f este nenegativă pe R, integrala există. Dacă f este pară și nedescrescătoare pe $[0, \infty)$ atunci, luînd $A = [|\xi| \geqslant a]$, avem

$$M_f(\xi) = \int_A f(\xi) + \int_{A^c} f(\xi)$$

i

$$f(a)P(A) \leqslant \int_A f(\xi) \leqslant \sup f(a)\ P(A),$$

$$0 \leqslant \int_{A^c} f(\xi) \leqslant f(a),$$

de unde urmează

$$f(a) \cdot P(A) \leqslant M_f(\xi) \leqslant \sup f(\xi)\ P(A) + f(a).$$

În particular, luînd $f(\xi) = |\xi|^r$, obținem

$$\frac{M|\xi|^r - a^r}{\sup |\xi|^r} \leqslant P(|\xi| \geqslant a) \leqslant \frac{M|\xi|^r}{a^r}:$$

membrul drept al inegalității fiind inegalitatea lui Markov, care pentru $r = 2$, se reduce la inegalitatea lui Cebîșev.

Luînd

$$f(\xi) = \frac{|\xi|^r}{1+|\xi|^r}\ (r > 0),$$

obținem

$$M\left(\frac{|\xi|^r}{1+|\xi|^r}\right) - \frac{a^r}{1+a^r} \leqslant P(|\xi| \geqslant a) \leqslant \frac{1+a^r}{a^r} M\left(\frac{|\xi|^r}{1+|\xi|^r}\right):$$

înlocuind pe ξ prin $\xi_n - \xi$ și prin $\xi_m - \xi_n$, urmează că dacă. $m,\ n \to \infty$

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \text{ dacă și numai dacă, } M\left(\frac{|\xi_n - \xi|^r}{1+|\xi_n - \xi|^r}\right) \to 0,$$

$$\xi_m - \xi_n \xrightarrow{p} 0 \text{ dacă, și numai dacă } M\left(\frac{|\xi_m - \xi_n|^r}{1+|\xi_m - \xi_n|^r}\right) \to 0.$$

87. *Dacă ξ este integrabilă, să se arate că*

$$|m_e - M(\xi)| \leqslant \sqrt{2D^2(\xi)},$$

unde m_e este mediana variabilei aleatoare ξ.

SOLUȚIE. Fie F funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ.

Se numește mediană a variabilei aleatoare ξ, un număr finit m_e, astfel încît

$$P(\xi \geqslant m_e) \geqslant \frac{1}{2} \leqslant P(\xi \leqslant m_e),$$

sau

$$F(m_e) \leqslant \frac{1}{2}, \quad F(m_e + 0) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Din inegalitatea lui Cebîșev, rezultă că

$$P[|\xi - M(\xi)| \geqslant \sqrt{2D^2(\xi)}] \leqslant \frac{1}{2},$$

astfel încît

$$M(\xi) - \sqrt{2D^2(\xi)} \leqslant m_e \leqslant M(\xi) + \sqrt{2D^2(\xi)}$$

ceea ce dovedește inegalitatea.

88. *Fie ξ^s o variabilă aleatoare simetrică. Să se arate că pentru fiecare ε și fiecare a, avem*

a) $$\frac{1}{2} P[\xi - m_e(\xi) \geqslant \varepsilon] \leqslant P[\xi^s \geqslant \varepsilon)]$$

și

b) $$\frac{1}{2} P[|\xi - m_e(\xi)| \geqslant \varepsilon] \leqslant P[|\xi^s| \geqslant \varepsilon] \leqslant 2P\left[|\xi - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

SOLUȚIE. a) Deoarece ξ^s este o variabilă aleatoare simetrică

$$\xi^s = \xi - \xi'$$

unde ξ și ξ' sînt independente și identic repartizate, urmează că la mediana $m_e(\xi)$ corespunde o mediană egală $m_e(\xi') = m_e(\xi) = m_e$ și

$$P[\xi^s \geqslant \varepsilon) = P\{[(\xi - m_e) - (\xi' - m_e)] \geqslant \varepsilon\} \geqslant P[\xi - m_e \geqslant \varepsilon, \ \xi' - m_e \leqslant 0] =$$

$$= P[\xi - m_e \geqslant \varepsilon] \cdot P([\xi' - m_e \leqslant 0] \geqslant \frac{1}{2} P[\xi - m_e \geqslant \varepsilon]$$

ceea ce demonstrează inegalitatea a).

b) Inegalitatea

$$\frac{1}{2} P[\xi - m_e(\xi) \geqslant \varepsilon] \leqslant P[\xi^s \geqslant \varepsilon],$$

împreună cu inegalitatea obținută schimbînd pe ξ în $-\xi$, transformă membrul stîng al acestei egalități în b).

Membrul drept al egalității (b) rezultă ținînd seama de distribuția variabilelor ξ și ξ'

$$P[|\xi^s| \geqslant \varepsilon] = P[|(\xi - a) - (\xi' - a)| \geqslant \varepsilon] \leqslant$$

$$\leqslant P\left[|\xi - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] + P\left[|\xi' - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] = 2P\left[|\xi - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

89. *Fie ξ^s o variabilă aleatoare simetrică. Să se arate că pentru orice $r > 0$ și orice a, avem*

$$\frac{1}{2} M|\xi - m_e|^r \leqslant M|\xi^s|^r \leqslant 2c_r \cdot M|\xi - a|^r,$$

unde

$$c_r = \begin{cases} 1 & \text{dacă } r \leqslant 1, \\ 2^{r-1} & \text{dacă } r \geqslant 1. \end{cases}$$

SOLUȚIE. Aplicăm inegalitatea elementară

$$|a + b|^r \leqslant c_r |a|^r + c_r |b|^r,$$

unde $c_r = 1$ sau 2^{r-1} după cum $r \leqslant 1$ sau $r \geqslant 1$

$$M|\xi^s|^r = M|(\xi - a) - (\xi' - a)|^r \leqslant c_r \cdot M|\xi - a|^r + c_r M|\xi' - a|^r =$$

$$= 2c_r M|\xi - a|^r.$$

Pentru membrul stîng al inegalității vom exclude cazul banal $M|\xi^s|^r = \infty$ și vom presupune $M|\xi^s|^r$ finit.

Fie

$$A(t) = P[|\xi - m_e| \geqslant t] \quad \text{și} \quad A^s(t) = P[|\xi^s| \geqslant t)]$$

și ținînd seama de punctul b) din problema anterioară, avem

$$A(t) \leqslant 2A^s(t).$$

Integrînd prin părți, obținem

$$M|\xi - m_e|^r = -\int_0^\infty t^r \, dA(t) \leqslant \int_0^\infty A(t) \, d(t^r) \leqslant 2\int_0^\infty A^s(t) \, d(t^r) =$$

$$= -2\int_0^\infty t^r \, dA^s(t) = 2M|\xi^s|^r.$$

90. *Fie ξ o variabilă aleatoare cu următoarele proprietăți:*
1° valoarea medie a varaibilei ξ există și este diferită de zero;
2° există $\delta > 0$ astfel ca $P(e^\xi < 1 - \delta) > 0$ și $P(e^\xi > 1 + \delta) > 0$;
3° pentru orice număr real h, $M(e^{h\xi}) = g(h)$ există.

Să se arate că există un număr real h_0 diferit de zero unic determinat astfel încît

$$M(e^{h_0\xi}) = 1.$$

SOLUȚIE. Din definiția valorii medii, avem

$$g(h) = M(e^{h\xi}) = \int_\Omega e^{h\xi}\,dP(\omega) = \int\limits_{\{\omega: e^\xi > 1+\delta\}} e^{\xi h}\,dP(\omega) + \int\limits_{\{\omega: e^\xi \leqslant 1+\delta\}} e^{\xi h}\,dP(\omega),$$

de unde

$$g(h) > \int\limits_{\{\omega: e^\xi > 1+\delta\}} e^{\xi h}\,dP(\omega) > (1+\delta)^h \int\limits_{\{\omega: e^\xi > 1+\delta\}} dP(\omega) = (1+\delta)^h P(e^\xi > 1+\delta)$$

sau

$$g(h) > (1+\delta)^h P(e^\xi > 1+\delta), \text{ pentru orice } h > 0.$$

Avem

$$\lim_{h\to\infty} g(h) = +\infty.$$

Dacă h este negativ, avem

$$g(h) > (1-\delta)^h P(e^\xi < 1-\delta)$$

și

$$\lim_{h\to-\infty} g(h) = \infty.$$

Din ultima proprietate a variabilei aleatoare ξ, rezultă că există derivatele funcției $g(h)$; derivate ce pot fi obținute prin derivarea sub integrală

$$\frac{d^r g(h)}{dh^r} = M(\xi^r e^{\xi h}): \quad r = 1, 2, \ldots$$

și

$$g''(h) = M(\xi^2 e^{\xi h}).$$

Din 2° rezultă că $g''(h) > 0$. Înseamnă că există $h^* \in R$ astfel încît $g(h)$ să aibă un minim în $h = h^*$.

Deoarece $g'(0) = M(\xi) \neq 0$, avem $h^* \neq 0$ și $g(h^*) < g(0) = 1$.

Funcția $g(h)$ este monoton descrescătoare în $(-\infty, h^*)$ și monoton crescătoare în $(h^*, +\infty)$.

Deoarece $g(0) = 1$, rezultă $g(h^*) < 1$ și de asemenea există $h_0 \in R$, $h_0 \neq 0$, astfel încît $g(h_0) = 1$

Se observă că $\begin{cases}\text{dacă } h^* > 0, \text{ atunci } h_0 > 0; & M(\xi) = g'(0) < 0,\\ \text{dacă } h^* < 0, \text{ atunci } h_0 < 0; & M(\xi) = g'(0) > 0.\end{cases}$

Deci h_0 și $M(\xi)$ au semne contrarii.

91. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare repartizate normal* $N(0, 1)$ *cu coeficientul de corelație* ρ. *Fie* $p = P(\xi\eta < 0)$.

Să se arate că $\rho = \cos\pi p$ *și să se calculeze probabilitatea evenimentului* $\{\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0\}$.

SOLUȚIE. Densitatea comună de probabilitate a variabilelor ξ și η este

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}\right)\right]$$

și

$$p = P(\xi\eta < 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint\limits_{(D)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}\right)\right] dx dy,$$

unde (D) este domeniul $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Facem schimbarea de variabile

$$y = k \cdot \cos\varphi,$$

$$\frac{x - \rho y}{\sqrt{1-\rho^2}} = k \sin\varphi.$$

Jacobianul acestei transformări este

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(k, \varphi)}\right| = k\sqrt{1-\rho^2}.$$

Domeniul de integrare este definit de $k \geqslant 0$ și

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{Arctg} \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Într-adevăr, semiaxa pozitivă a y-lor este definită de $x = 0$, $y > 0$; condiția $y > 0$ implică $\cos\varphi \geqslant 0$, adică $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, iar condiția $x=0$ implică $\frac{-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}} = y\operatorname{tg}\varphi$, de unde

$$\varphi = \operatorname{Arctg} \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Semiaxa x-lor negativi, $y = 0$ implică $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ și $x = -k\sqrt{1-\rho^2}$; atunci $x < 0$ conduce la $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Deci

$$p = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty e^{-k^2} k\,dk \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{Arctg}\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}} \sqrt{1-\rho^2}\, d\varphi,$$

de unde

$$p = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg}\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right].$$

Dacă $\rho > 0$, atunci

$$-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} < 0 \text{ și } \operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{-\rho} + \operatorname{Arctg}\frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = -\frac{\pi}{2}$$

și

$$p = \frac{1}{\pi}\left(-\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{-\rho}\right).$$

Aplicînd cosinusul în ambii membri obținem

$$\cos p\pi = \cos\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho},$$

de unde

$$\rho = \cos p\pi.$$

Același rezultat se obține și în cazul $\rho < 0$. Avem

$$P\{\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(\xi\eta < 0),$$

$$P\{\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0\} = \frac{1}{2}(1-p),$$

$$P\{\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0\} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arc}\cos\rho\right],$$

și cum $\operatorname{Arc}\cos\rho + \operatorname{Arc}\sin\rho = \frac{\pi}{2}$

$$P\{\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0\} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\rho\right].$$

92. *Se consideră variabilele aleatoare ξ și η independente, fiecare urmînd aceeași lege normală $N(a, \sigma)$.*

a) *Să se afle coeficientul de corelație al variabilelor aleatoare $\alpha\xi + \beta\eta$ și $\alpha\xi - \beta\eta$, precum și repartiția lor comună.*

b) *Să se demonstreze că* $M(\max(\xi, \eta)) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

SOLUȚIE. Să notăm cu $\varphi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ și $\varphi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

Atunci din definiția coeficientului de corelație al variabilelor φ_1 și φ_2 rezultă că avem

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{M(\varphi_1\varphi_2) - M(\varphi_1)M(\varphi_2)}{D(\varphi_1)D(\varphi_2)}.$$

Cum variabilele aleatoare ξ și η sînt independente și urmează fiecare aceeași lege $N(a, \sigma)$, atunci

$$M(\varphi_1) = (\alpha + \beta)\, a; \quad M(\varphi_2) = (\alpha - \beta)\, a,$$
$$D^2(\varphi_1) = D^2(\varphi_2) = (\alpha^2 + \beta^2)\, \sigma^2.$$

Mai departe

$$M(\varphi_1 \varphi_2) = M[(\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha\xi - \beta\eta)] = M(\alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2) = \alpha^2 M(\xi^2) - \beta^2 M(\eta^2),$$
$$M(\xi^2) = D^2(\xi) + M^2(\xi) = \sigma^2 + a^2 = M(\eta^2).$$

Așa dar

$$M(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\sigma^2 + a^2).$$

Deci

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\sigma^2 + a^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\, a^2}{(\alpha^2 + \beta^2)\, \sigma^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Deoarece ξ și η sînt normale $N(a, \sigma)$, urmează că $\alpha\xi + \beta\eta$ și $\alpha\xi - \beta\eta$ urmează fiecare tot o lege normală și anume $\alpha\xi + \beta\eta$ urmează legea $N[(\alpha + \beta)\, a, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \sigma]$, iar $\alpha\xi - \beta\eta$ urmează legea $N[(\alpha - \beta)\, a, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \sigma]$. Atunci vectorul aleator $(\varphi_1, \varphi_2) = (\alpha\xi + \beta\eta, \alpha\xi - \beta\eta)$ urmează o lege normală bidimensională a cărei densitate de repartiție este

$$p_{\varphi_1 \cdot \varphi_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2)(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left\{ - \frac{[x - (\alpha + \beta)\, a]^2 - 2\rho[x - (\alpha + \beta)\, a][y - (\alpha - \beta)\, a] + [y - (\alpha - \beta)\, a]^2}{2\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2) \cdot (1 - \rho^2)} \right\}.$$

b) Aflăm mai întîi funcția de repartiție a variabilei aleatoare $\max(\xi, \eta)$. Prin definiție

$$F(x) = P[\omega : \max(\xi(\omega), \eta(\omega)) < x] = P(\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < x) =$$
$$= P(\omega : \xi(\omega) < x)\, P(\omega : \eta(\omega) < x),$$

deoarece variabilele ξ și η sînt independente.

Cum ξ și η urmează aceeași lege $N(a, \sigma)$ înseamnă că

$$F(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\, dz \right)^2,$$

iar densitatea de repartiție a variabilei $\max(\xi, \eta)$ este

$$\frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\, dz.$$

Acum putem calcula valoarea medie

$$M[\max(\xi, \eta)] = \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} xe\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\,dz\right)dx.$$

Trecînd în coordonate polare (fig. 26)

$$x - a = \rho\cos\theta, \quad 0 < \rho < +\infty$$

$$z - a = \rho\sin\theta, \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}.$$

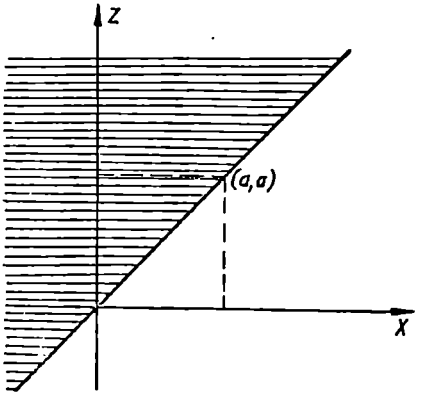


Fig. 26.

Urmează atunci că

$$M(\max(\xi, \eta)) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2}\iint_{(D)} (\rho\cos\theta + a)\, e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2}\left[\int_0^{\infty} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\,d\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + a\int_0^{\infty} e^{\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\,d\rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta\right] = \frac{1}{\pi\sigma^2}(a\pi\sigma^2 + \sigma^3\sqrt{\pi}) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

93. *Să considerăm variabila aleatoare*

$$F_i = \frac{N}{n_i}\cdot\frac{s_i^2}{S^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

unde $N > 0$, $n_i > 0$ *sînt constante,* $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, *iar* s_i^2 *și* S *sînt variabile aleatoare independente care urmează fiecare o lege* χ^2 *cu* n_i *respectiv* N, *grade de libertate.*

Se cere:

a) *Să se calculeze funcția de repartiție și densitatea de repartiție a variabilei* F_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

b) *Să se scrie expresia momentelor,* $M_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$.

SOLUȚIE. a) Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare cu k dimensiuni $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ este dată de

$$G(F_1, F_2, \ldots, F_k) = \frac{1}{2^{\frac{N+n}{2}-k-1}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\prod_{i=1}^{k}\Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)}\times$$

$$\times\int_A e^{-\frac{1}{2}(S^2+\Sigma s_i^2)}\,S^{N-1}\prod_{i=1}^{k} s_i^{n_i-1}\,ds_1\,ds_2\ldots ds_k\,dS,$$

unde mulțimea A este definită de

$$s_i \geqslant 0, \quad S \geqslant 0, \frac{s_i^2}{S^2} < \frac{n_i}{N} F_i.$$

Făcînd schimbarea de varibilă

$$s_i = S \sqrt{\frac{n_i}{N} y_i},$$

se obține

$$G(F_1, F_2, \ldots, F_k) =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{\frac{n_i}{2}} N^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} \int_0^{F_1} \int_0^{F_2} \ldots \int_0^{F_k} \frac{y_1^{\frac{n_1}{2}-1} \ldots y_k^{\frac{n_k}{2}-1}}{(N+n_1 y_1+n_2 y_2+\ldots+n_k y_k)^{\frac{N+n}{2}}} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_k,$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este egală cu

$$p(F_1, \ldots, F_k) = \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{\frac{n_i}{2}} N^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} \cdot \frac{F_1^{\frac{n_1}{2}-1} F_2^{\frac{n_2}{2}-1} \ldots F_k^{\frac{n_k}{2}-1}}{(n_1 F_1 + n_2 F_2 + \ldots + n_k F_k + N)^{\frac{N+n}{2}}}$$

pentru $F_1 \geqslant 0, \ldots, F_k \geqslant 0$.

b) Momentele sînt date de

$$M_{r_1, \ldots, r_k} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k} n_i^{\frac{n_i}{2}} N^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{k} F_i^{\frac{n_i}{2}+r_i-1}}{(n_1 F_1 + n_2 F_2 + \ldots + n_k F_k + N)^{\frac{N+n}{2}}} dF_1 \ldots dF_k.$$

Se observă că momentele $M_{r_1, \ldots, r_k}$ există dacă și numai dacă $\sum_i r_i < \frac{N}{2}$.

Făcînd schimbarea de variabile

$$F_i = \frac{N}{n_i} \cdot \frac{y_i}{1 - \Sigma y_i},$$

se obține

$$M_{r_1, \ldots, r_k} =$$

$$= \frac{N^{\Sigma r_i}}{\prod_{i=1}^{k} n_i^{r_i}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{N+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)} \cdot B\left(\frac{n_1}{2} + r_1, \ldots, \frac{n_k}{2} + r_k, \frac{N}{2} - \Sigma r_i\right) =$$

$$= \frac{N^{\Sigma r_i}}{\prod_{i=1}^{k} n_i^{r_i}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2} + r_1\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n_k}{2} + r_k\right) \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2} - \Sigma r_i\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n_i}{2}\right)}.$$

FUNCȚII CARACTERISTICE. FUNCȚII GENERATOARE

1. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare care ia valorile* x, $x = 0, 1, \ldots$, *cu probabilitățile* $P(x)$, *unde*

$$P(x) = e^{-2}\frac{2^x}{x!}$$

Se cere să se determine:

a) *funcția caracteristică;*

b) *valoarea medie și dispersia.*

SOLUȚIE. a) Funcția caracteristică este dată de

$$\varphi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} P(x) = e^{-2}\sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}\frac{2^x}{x!} = e^{-2}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(2e^{it})^x}{x!} =$$

$$= e^{-2}e^{2e^{it}} = e^{2(e^{it}-1)}.$$

b) Să calculăm momentele de ordinul întîi și al doilea, cu ajutorul funcției caracteristice. Pentru aceasta să calculăm derivatele de ordinul întîi și al doilea ale funcției caracteristice. Avem

$$\varphi'(t) = 2e^{it}ie^{2(e^{it}-1)}; \quad \varphi'(0) = 2i;$$

$$\varphi''(t) = 2i^2e^{it}e^{2(e^{it}-1)} + 4i^2e^{2it}e^{2(e^{it}-1)}; \varphi''(0) = 6i^2.$$

Rezultă că

$$M_1 = \frac{\varphi'(0)}{i} = 2,$$

$$M_2 = \frac{\varphi''(0)}{i^2} = 6.$$

Atunci

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = 2.$$

2. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare care ia valoarea* x, $x = 1, 2, \ldots$ *cu probabilitatea* $P(x)$ *egală cu*

$$P(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}.$$

Se cere:
a) *Să se scrie funcția caracteristică.*
b) *Să se calculeze valoarea medie și dispersia.*
SOLUȚIE. Să verificăm mai întîi că

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x) = 1.$$

Avem

$$\frac{2}{3}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1.$$

a) Funcția caracteristică este dată de

$$\varphi(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx} P(x) = \frac{2}{3}\sum_{x=1}^{\infty} e^{itx}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}e^{it}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{it}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}\cdot e^{it}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{it}},$$

deci

$$\varphi(t) = \frac{2e^{it}}{3-e^{it}}.$$

b) Să calculăm derivatele funcției caracteristice. Avem

$$\varphi'(t) = \frac{2ie^{it}(3-e^{it}) + 2ie^{2it}}{(3-e^{it})^2}\ ;\varphi'(0) = \frac{6i}{4} = \frac{3}{2}i,$$

$$\varphi''(t) = \frac{[2i^2e^{it}(3-e^{it}) - 2i^2e^{2it} + 4\ i^2e^{2it}](3-e^{it})^2}{(3-e^{it})^4}$$

$$+\frac{2(3-e^{it})ie^{it}[2ie^{it}(3-e^{it}) + 2ie^{2it}]}{(3-e^{it})^4},$$

iar

$$\varphi''(0) = \frac{48\ i^2}{16} = 3i^2.$$

Rezultă că

$$M_1 = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{3}{2},$$

$$M_2 = \frac{\varphi''(0)}{i^2} = 3.$$

Atunci

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Să calculăm valorile medii de mai înainte și prin altă metodă. Avem

$$M_1 = \sum_{x=1}^{\infty} x P(x) = \frac{2}{3} \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right].$$

Să notăm cu

$$S = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$$

Dacă $x = 1$, pot scrie

$$S = 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots\right] =$$

$$= 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{x}{3}\left[\frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots\right]\right\} =$$

$$= 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{3} \frac{x^2}{3 - x} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x(3 - x) + x^2}{(3 - x)^2}.$$

Cum $x = 1$, rezultă

$$S = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}.$$

Deci

$$M_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2}.$$

Analog se poate calcula și M_2.

3. *Într-o urnă se află* 10 *bile albe și* 5 *bile negre. Se cere*:

a) *Să se determine funcția caracteristică a variabilei aleatoare* ξ *care ne dă numărul de bile albe obținute în șase extracții succesive, punînd de fiecare dată la loc bila extrasă.*

b) *Să se determine funcția caracteristică a variabilei aleatoare* ξ *care dă numărul de bile albe obținute în șase extracții succesive — fără a se pune la loc bila extrasă.*

SOLUȚIE. a) Fiecărei extracții îi atașăm variabila aleatoare

$$\xi_k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, 6,$$

adică variabila aleatoare ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ ia valoarea 1 dacă am extras o bilă albă și valoarea zero dacă am extras o bilă neagră. Numărului de bile albe obținute în 6 extracții îi corespunde variabila aleatoare

$$\xi = \sum_{k=1}^{6} \xi_k .$$

Cum variabilele aleatoare ξ_k sînt independente, rezultă că

$$\varphi_\xi (t) = \prod_{k=1}^{6} \varphi_{\xi_k}(t).$$

Dar

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \frac{2}{3} e^{it} + \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6.$$

Deci

$$\varphi_\xi (t) = \left(\frac{2}{3} e^{it} + \frac{1}{3}\right)^6 .$$

b) În acest caz variabila aleatoare ξ poate lua valorile 1, 2, ..., 6 cu probabilitățile

$$P_6 (k) = P(\xi = k) = \frac{C_{10}^k C_5^{6-k}}{C_{15}^6} ; \quad k = 1, 2, \ldots, 6.$$

Aplicînd acum definiția funcției caracteristice, obținem

$$\varphi_\xi (t) = M(e^{it\xi}) = \sum_{k=1}^{6} e^{itk} P_6 (k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{C_{10}^k C_5^{6-k} e^{itk}}{C_{15}^6} .$$

4. *Se aruncă două zaruri. Să se scrie funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ care ne dă numărul de puncte obținute pe cele două zaruri.*

SOLUȚIE. Să notăm cu ξ_1 numărul de puncte obținut pe primul zar și cu ξ_2 numărul de puncte obținut pe celălalt zar. Atunci $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Întrucît variabilele aleatoare ξ_1 și ξ_2 sînt independente, urmează că

$$\varphi_\xi (t) = M(e^{it\xi}) = M(e^{it(\xi_1+\xi_2)}) = M(e^{it\xi_1}) M(e^{it\xi_2}).$$

Deci

$$\varphi_\xi (t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t).$$

Cum însă

$$\varphi_{\xi_1}(t) = \varphi_{\xi_2}(t) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} e^{itk},$$

obținem

$$\varphi_\xi (t) = \frac{1}{36} \left(\sum_{k=1}^{6} e^{itk}\right)^2 .$$

5. *Se dau două urne A și B, care conțin bile albe în proporții cunoscute. Din urna A se scoate o bilă și se pune în urna B. Din urna B efectuăm apoi 3 extracții succesive, punînd de fiecare dată bila înapoi în urnă.*

Să se calculeze funcția caracteristică corespunzătoare numărului de bile albe obținut în aceste patru extracții.

SOLUȚIE. Fie a numărul de bile albe din urna A și b numărul de bile negre din aceeași urnă.

Notăm analog cu α, β numărul de bile albe, respectiv negre din urna B.

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad B\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Să notăm cu ξ variabila aleatoare care ne dă numărul de bile albe în cele patru extracții efectuate în condițiile problemei.

Atunci ξ poate lua valorile 0, 1, 2, 3, 4.

$$P(\xi=0)=\frac{b}{a+b}\cdot\left(\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1}\right)^3,$$

$$P(\xi=1)=\frac{a}{a+b}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+1}\right)^3+\frac{b}{a+b}\cdot C_3^1\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\left(\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1}\right)^2,$$

$$P(\xi=2)=\frac{a}{a+b}\cdot C_3^1\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+1}\right)^2+\frac{b}{a+b}C_3^2\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\right)^2\cdot\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1},$$

$$P(\xi=3)=\frac{a}{a+b}C_3^2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right)^2\frac{\beta}{\alpha+\beta+1}+\frac{b}{a+b}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\right)^3,$$

$$P(\xi=4)=\frac{a}{a+b}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right)^3.$$

Acum putem scrie funcția caracteristică a variabilei ξ

$$\varphi(t)=M(e^{it\xi})=\frac{b}{a+b}\left(\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1}\right)^3+\frac{e^{it}}{(a+b)(\alpha+\beta+1)^3}[a\beta^3+C_3^1b\alpha(\beta+1)^2]+$$

$$+\frac{e^{2it}}{(a+b)(\alpha+\beta+1)^3}[C_3^1a(\alpha+1)\beta^2+C_3^2b\alpha^2(\beta+1)]+$$

$$+\frac{e^{3it}}{(a+b)(\alpha+\beta+1)}[C_3^2a(\alpha+1)^2\beta+b\alpha^3]+\frac{a}{a+b}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\right)^3e^{4it}.$$

6. *Să se afle funcția caracteristică a repartiției binomiale.*

SOLUȚIE. Dacă variabila aleatoare ξ urmează o lege binomială atunci

$$P(\xi=k)=C_n^kp^kq^{n-k};\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

$$0\leqslant p\leqslant 1;\quad 0\leqslant q\leqslant 1;\quad p+q=1.$$

Din definiția funcției caracteristice urmează că avem

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi})$$

sau

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n,$$

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n.$$

7. *Să se afle funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ ce urmează o lege Poisson.*

SOLUȚIE. Variabila aleatoare ξ spunem că urmează o lege Poisson dacă $P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

Atunci

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}.$$

Deci obținem

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

8. *Variabila aleatoare ξ poate lua valoarea m (întreg pozitiv) cu probabilitatea $P(\xi = m) = (1 - q)q^m$, unde $q < 1$.*

Să se găsească repartiția sumei a k variabile aleatoare independente de acest tip.

SOLUȚIE. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ variabile aleatoare independente și

$$P(\xi_j = m) = (1 - q)q^m; \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Atunci

$$\varphi_{\sum_{j=1}^{k}\xi_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{\xi_j}(t),$$

$$\varphi_{\xi_j}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}(1 - q)q^m = (1 - q)\sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}q^m,$$

$$\varphi_{\xi_j}(t) = \frac{1 - q}{1 - qe^{it}}.$$

Așadar

$$\psi(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{k}\xi_j}(t) = (1 - q)^k \cdot (1 - qe^{it})^{-k},$$

$$\psi(t)=(1-q)^k(1-qe^{it})^{-k}=(1-q)^k\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{-k(-k-1)\ldots(-k-m+1)}{m!}(qe^{it})^m=$$

$$=(1-q)^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k(k+1)\ldots(k+m-1)}{m!}(qe^{it})^m,$$

$$\psi(t)=(1-q)^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!}{(k-1)!\,m!}q^m e^{itm}.$$

Cum $q<1$ și

$$\sum_{m=0}^{\infty}P(\eta=m)=(1-q)^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!}{(k-1)\cdot m!}\cdot q^m=1,$$

rezultă că $\psi(t)$ este funcția caracteristică a variabilei aleatoare η care ia valoarea m (întreg pozitiv) cu probabilitatea

$$P(\eta=m)=(1-q)^k\frac{(k+m-1)!}{m!\,(k-1)!}q^m. \tag{1}$$

Deci repartiția variabilei aleatoare $\sum_{j=1}^{k}\xi_j$ este caracterizată de expresia (1).

9. *Se dă funcția*

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{pentru } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{pentru } x<0.\end{cases}$$

Se cere

a) *Să se verifice că este o densitate de repartiție.*

b) *Să se scrie funcția caracteristică.*

c) *Cu ajutorul funcției caracteristice să se calculeze valoarea medie și dispersia.*

SOLUȚIE. a) Pentru ca funcția dată să fie o densitate de repartiție trebuie să avem

$$\int_0^{\infty}f(x)\,dx=1.$$

Avem

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1.$$

Rezultă că $f(x)$ este o densitate de repartiție.

b) Funcția caracteristică este dată de

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty}e^{itx}e^{-x}\,dx=\int_0^{\infty}e^{-x(1-it)}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{1-it}\cdot e^{-x(1-it)}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{1-it}.$$

Deci

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-it},$$

c) Se știe că

$$M_1 = \frac{\varphi'(0)}{i}, \quad M_2 = \frac{\varphi''(0)}{i^2}.$$

Derivînd, avem

$$\varphi'(t) = \frac{i}{(1-it)^2}; \quad \varphi'(0) = \frac{i}{1},$$

$$\varphi''(t) = \frac{2(1-it)i^2}{(1-it)^4} = \frac{2i^2}{(1-it)^3},$$

$$\varphi''(0) = \frac{2i^2}{1}$$

Urmează că

$$M_1 = 1, \qquad M_2 = 2,$$

de unde

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = 1.$$

10. *Să dă funcția de repartiție.*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0. \\ 1 - e^{-\frac{x}{5}} & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Se cere:
a) *Densitatea de repartiție.*
b) *Funcția caracteristică.*
c) *Valoarea medie și dispersia.*

SOLUȚIE. a) Densitatea de repartiție este dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$$

b) Funcția caracteristică este dată de

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^\infty e^{itx} \cdot e^{-\frac{x}{5}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{5}-it\right)}\,dx = -\frac{1}{5\left(\frac{1}{5}-it\right)} \cdot e^{-x\left(\frac{1}{5}-it\right)}\Big|_0^\infty.$$

Deci

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - 5it}.$$

c) Pentru calculul valorilor medii, avem

$$\varphi'(t) = \frac{5i}{(1 - 5it)^2}\ ;\ \varphi'(0) = 5i,$$

$$\varphi''(t) = \frac{10i\,(1 - 5it)\,5i}{(1 - 5it)^2};\ \varphi''(0) = 50i^2.$$

Deci

$$M_1 = 5, \qquad M_2 = 50.$$

Atunci

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = 25.$$

Să calculăm caracteristicile de mai înainte și pe altă cale. Avem

$$M_1 = \frac{1}{5}\int_0^\infty x\, e^{-\frac{x}{5}}\,dx.$$

Integrăm prin părți

$$u = x \qquad du = dx,$$

$$dv = e^{-\frac{x}{5}}\,dx \qquad v = -5e^{-\frac{x}{5}}.$$

Deci

$$M_1 = -\frac{1}{5}5x\,e^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{5}}\,dx = 5,$$

iar

$$M_2 = \frac{1}{5}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{5}}\,dx.$$

Integrînd prin părți

$$x^2 = u\,;\quad du = 2x\,dx.$$

$$e^{-\frac{x}{5}}\,dx = dv \qquad v = -5\,e^{-\frac{x}{5}}$$

obținem

$$M_2 = -\frac{1}{5}5x^2 e^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{5}}\,dx$$

$$= 2\left[-5x e^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^\infty + 5\int_0^\infty e^{-\frac{x}{5}}dx\right] = 50.$$

Rezultă că

$$D^2 = 25.$$

11. *Se dă funcția*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-5)} & \text{pentru } x \geqslant 5, \\ 0 & \text{pentru } x < 5. \end{cases}$$

Se cere:

a) *Să se arate că $f(x)$ este o densitate de repartiție.*

b) *Să se scrie funcția caracteristică corespunzătoare.*

c) *Să se calculeze valoarea medie și dispersia.*

SOLUȚIE. a) Pentru ca $f(x)$ să fie densitate de repartiție trebuie ca

$$\int_5^\infty f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Avem

$$\int_5^\infty e^{-(x-5)}\,\mathrm{d}x = -e^{-(x-5)}\Big|_5^\infty = 1.$$

Deci $f(x)$ este o densitate de repartiție.

b) Funcția caracteristică este dată de

$$\varphi(t) = \int_5^\infty e^{itx} e^{-(x-5)}\,\mathrm{d}x = e^5 \int_5^\infty e^{-x(1-it)}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^5}{1-it} e^{-x(1-it)}\Big|_5^\infty.$$

Rezultă că

$$\varphi(t) = \frac{e^{5it}}{1-it}.$$

c) Pentru calculul primelor două momente, să calculăm primele două derivate ale funcției caracteristice. Avem

$$\varphi'(t) = \frac{5ie^{5it}(1-it) + ie^{5it}}{(1-it)^2}\ ;\ \varphi'(0) = 6i,$$

Deci

$$M_1 = \frac{\varphi'(0)}{i} = 6.$$

$$\varphi''(t) = \frac{(25i^2 e^{5it}(1-it) - 5i^2 e^{5it} + 5i^2 e^{5it})(1-it)^2}{(1-it)^4} +$$

$$+ \frac{2i(1-it)\,[5ie^{5it}(1-it) + ie^{5it}]}{(1-it)^4}$$

$$\varphi''(0) = 25i^2 - 5i^2 + 5i^2 + 10i^2 + 2i^2 = 37i^2,$$

iar

$$M_2 = 37.$$

Rezultă că

$$D^2 = 37 - 36 = 1.$$

Să calculăm caracteristicile cerute și prin altă metodă. Avem

$$M_1 = \int_5^\infty x f(x)\,dx = \int_5^\infty x e^{-(x-5)}\,dx.$$

Să integrăm prin părți

$$x = u,$$

$$e^{-(x-5)}\,dx = dv.$$

Atunci

$$dx = du,$$

$$v = -e^{-(x-5)}.$$

Avem

$$M_1 = -xe^{-(x-5)}\Big|_5^\infty + \int_5^\infty e^{-(x-5)}\,dx = 5 - e^{-(x-5)}\Big|_5^\infty = 6.$$

Pentru calculul momentului de ordinul al doilea avem:

$$M_2 = \int_5^\infty x^2 f(x)\,dx = \int_5^\infty x^2 e^{-(x-5)}\,dx.$$

Integrăm prin părți

$$x^2 = u \qquad du = 2x\,dx,$$

$$e^{-(x-5)}\,dx = dv \qquad v = -e^{-(x-5)}.$$

$$M_2 = -x^2 e^{(x-5)}\Big|_5^\infty + 2\int_5^\infty x e^{-(x-5)}\,dx = 25 + 2M_1 = 37.$$

Atunci

$$D^2 = 37 - 36 = 1.$$

12. *Să se afle funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ cu densitatea de repartiție definită astfel*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a - c, \\ \frac{1}{c^2}(x - a + c), & a - c < x < a, \\ -\frac{1}{c^2}\cdot(x - a - c), & a \leqslant x < a + c, \\ 0, & x \geqslant a + c. \end{cases}$$

SOLUȚIE. Prin definiția

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}).$$

Atunci

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \int_{a-c}^{a} e^{itx} \cdot \frac{x-a+c}{c^2}\,dx - \int_{a}^{a+c} e^{itx} \cdot \frac{x-a-c}{c^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{c^2 it} x e^{itx}\Big|_{a-c}^{a} + \frac{1}{c^2 t^2} e^{itx}\Big|_{a-c}^{a} + \frac{c-a}{c^2 it} e^{itx}\Big|_{a-c}^{a} - \frac{1}{c^2 it} x e^{itx}\Big|_{a}^{a+c} -$$

$$- \frac{1}{c^2 t^2} e^{itx}\Big|_{a}^{a+c} + \frac{a+c}{itc^2} e^{itx}\Big|_{a}^{a+c} =$$

$$= \frac{e^{ita} - e^{ita} \cdot e^{-itc} - e^{ita} \cdot e^{itc} + e^{ita}}{t^2 \cdot c^2} = \frac{e^{ita}}{c^2 t^2} [2 - (e^{itc} + e^{-itc})] =$$

$$= e^{ita} \left(\frac{\sin \frac{tc}{2}}{\frac{ct}{2}} \right)^2 .$$

Rezultă, în definitiv,

$$\varphi(t) = e^{ita} \left(\frac{\sin \frac{tc}{2}}{\frac{ct}{2}} \right)^2 .$$

13. *Să se afle funcția caracteristică a variabilei aleatoare* ξ *care are funcția de repartiție*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a, \\ 1 - e^{-k^2(x-a)}, & x \geqslant a. \end{cases}$$

SOLUȚIE. Din definiția funcției caracteristice, rezultă

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF(x) = \int_{a}^{\infty} e^{itx}\,d\,(1 - e^{-k^2(x-a)}) =$$

$$= k^2 \int_{a}^{\infty} e^{itx} e^{-k^2(x-a)}\,dx = k^2 e^{k^2 a} \int_{a}^{\infty} e^{-x(k^2-it)}\,dx =$$

$$= \frac{k^2 e^{k^2 a}}{k^2 - it} \left(-e^{-x(k^2-it)}\right)\Big|_{a}^{\infty} = \frac{k^2 e^{k^2 a} e^{-a(k^2-it)}}{k^2 - it} = \frac{k^2 e^{ita}}{k^2 - it} .$$

Deci, funcția caracteristică a repartiției date, este

$$\varphi(t) = \frac{k^2 e^{iat}}{k^2 - it} .$$

14. *Să se afle funcția caracteristică a variabilei aleatoare, care are funcția de repartiție*

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ \dfrac{x+a}{2a}, & -a\leqslant x<a,\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$$

SOLUȚIE. Din definiție rezultă

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,\mathrm{d}\left(\frac{x+a}{2a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}e^{itx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2iat}e^{itx}\Big|_{-a}^{a}=\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{2iat}=\frac{\sin at}{at}.$$

15. *Să se calculeze funcția caracteristică a variabilei aleatoare* ξ *care are densitatea de repartiție*

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>2,\\ \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{|x|}{2}\right), & |x|\leqslant 2.\end{cases}$$

SOLUȚIE. Din definiția funcției caracteristice avem

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{itx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)e^{itx}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{itx}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{itx}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-itx}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{itx}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\cos tx\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{0}^{2}\cos tx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cos tx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin tx}{t}\Big|_{0}^{2}-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin tx}{t}\right)=$$

$$=\frac{\sin 2t}{t}-\frac{1}{2}\,x\,\frac{\sin tx}{t}\Big|_{0}^{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{\sin tx}{t}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2t^2}\cos tx\Big|_{0}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2t^2}(1-\cos 2t)=\frac{1-1+2\sin^2 t}{2t^2}=\frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

Deci,

$$\varphi(t)=\frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

16. *Să se găsească funcția caracteristică a variabilei aleatoare* ξ *care urmează o lege normală cu densitatea*

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (x-a)^2}.$$

SOLUȚIE. Din definiția funcției caracteristice, rezultă

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-h^2(x-a)^2}\,dx =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 (x^2 - 2ax + a^2) + itx}\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left[x^2 - 2\left(a + \frac{it}{2h^2}\right)x\right]} \cdot e^{-a^2h^2}\,dx =$$

$$= \frac{he^{-a^2h^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left[x - \left(a + \frac{it}{2h^2}\right)\right]^2} e^{h^2a^2 + iat - \frac{h^2t^2}{4h^4}}\,dx =$$

$$= \frac{he^{ita - \frac{t^2}{4h^2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left[x - \left(a + \frac{it}{2h^2}\right)\right]^2}\,dx = e^{ita - \frac{t^2}{4h^2}}.$$

Deci

$$\varphi(t) = e^{ita - \frac{t^2}{4h^2}}.$$

17. *Fie* ξ, η *două variabile aleatoare a căror densitate de repartiție comună este dată de*

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)}, \quad x, y \in (-\infty, +\infty).$$

Să se afle

1° $F_{\xi,\eta}(x,y)$, $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$, $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$.

2° *Funcția caracteristică.*

SOLUȚIE. 1° Din definiție rezultă

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{du\,dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{du}{1+u^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{y} \frac{dv}{1+v^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y\right).$$

Prin urmare

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y\right); \quad x, y \in (-\infty, +\infty).$$

Avem

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x,$$

$$F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y.$$

În continuare, găsim

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

Analog

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

2°. Aplicînd definiția funcției caracteristice a vectorului aleator (ξ, η), găsim

$$\varphi_{\xi,\eta}(s,t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(sx+ty)}\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{1+x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ity}}{1+y^2}dy = e^{-|s|-|t|}.$$

Deci

$$\varphi_{\xi,\eta}(s,t) = e^{-(|s|+|t|)}.$$

Observație: Se vede imediat că variabilele ξ și η sînt independente. De asemenea, observăm că nu există momente de nici un ordin.

18. *Fie ξ o variabilă aleatoare care urmează o lege Poisson de parametru ν. Dacă considerăm că parametrul ν este o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

cu $a > 0$, atunci

$$P(\xi = k) = \int_0^\infty \frac{x^k}{k!}e^{-x}\frac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-ax}\,dx =$$

$$= \left(\frac{a}{1+a}\right)^\lambda \cdot \frac{(-1)^k}{(1+a)^k}\cdot\frac{(-\lambda)(-\lambda-1)\ldots(-\lambda-k+1)}{k!}.$$

Se cere:

a) *să se afle funcția caracteristică a variabilei ξ;*

b) *să se calculeze $M(\xi)$ și $D^2(\xi)$.*

SOLUȚIE. a) Aplicînd definiția funcției caracteristice obținem imediat

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{(1+a)^k} \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{k!}.$$

Observînd însă că

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{(1+a)^k} \cdot \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{k!} = \left(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\right)^{-\lambda}$$

avem

$$\varphi(t) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{\lambda} \left(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\right)^{-\lambda}.$$

b) Calculăm momentele cu ajutorul funcției caracteristice

$$M(\xi) = \frac{1}{i}\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{i}\left[\left(\frac{a}{1+a}\right)^{\lambda} \lambda \left(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\right)^{-\lambda-1} \frac{ie^{it}}{1+a}\right]_{t=0}.$$

Deci

$$M(\xi) = \frac{\lambda}{a}.$$

Calculînd în mod analog momentul de ordinul al doilea, obținem

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{\lambda}{a}\left(1 + \frac{\lambda}{a}\right).$$

19. *Să se afle funcția caracteristică a repartiției Cauchy, adică a variabilei aleatoare ξ cu densitatea*

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \qquad a > 0$$

și apoi să se arate că repartiția Cauchy este o repartiție stabilă.

SOLUȚIE. Prin definiție

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Calculăm $\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + a^2}\,dx$ cu ajutorul reziduurilor și anume calculînd

$$\frac{a}{\pi}\int_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{z^2 + a^2}\,dz,$$

unde Γ este conturul din figura alăturată (segmentul-R, R și semicercul de rază R), fig. 27.

$$2\pi i \sum \text{rezid} = \frac{a}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\,dz = \frac{a}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}\,dx + \frac{a}{\pi}\int_{C}\frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\,dz.$$

Pe conturul (C)

$$z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad dz = iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

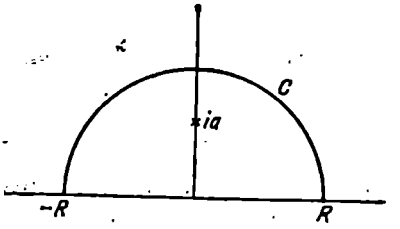


Fig. 27.

Avem

$$\left|\frac{a}{\pi}\int_{C}\frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\,dz\right| \underset{R\to\infty}{\to} 0,$$

deoarece

$$\left|\frac{a}{\pi}\int_{C}\frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\,dz\right| = \left|\frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{itRe^{i\theta}}}{R^2+a^2}\,iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{Rd\theta}{R^2+a^2} = \frac{a\pi}{\pi}\cdot\frac{R}{R^2+a^2} \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Urmează că

$$\lim_{R\to\infty} 2\pi i \sum \text{rez} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}\,dx.$$

Va trebui că calculăm reziduul funcției $e^{itz}/(z^2+a^2)$ în punctul ia singurul pol interior conturului ales.

Din

$$\lim_{z\to ia}(z-ia)\,h(z) = \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{e^{itz}}{(z-ia)(z+ia)} =$$

$$= \frac{e^{-ta}}{2ia}, \quad a>0; \quad t\in(-\infty,+\infty),$$

rezultă

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\,dz = \frac{2\pi i\,a}{\pi}\cdot\frac{e^{-ta}}{2ia} = e^{-ta}.$$

Știm că $|\varphi(t)| \leqslant 1$,
Cum $a>0$ rezultă că

$$\varphi(t) = e^{-|t|a}.$$

Fie ξ și η două variabile aleatoare independente urmînd fiecare o lege Cauchy, adică

$$f_\xi(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}, \quad a > 0,$$

$$f_\eta(x) = \frac{b}{\pi(x^2+b^2)}, \quad b > 0.$$

Să arătăm că variabila aleatoare $\xi + \eta$ urmează tot o lege Cauchy. Într-adevăr

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(t) = e^{-|t|a}\,e^{-|t|b} = e^{-|t|(a+b)},$$

care este funcția caracteristică a unei variabile aleatoare ce urmează o lege Cauchy cu densitatea

$$f(x) = \frac{a+b}{\pi(x^2+(a+b)^2)}.$$

20. *Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variabile aleatoare independente distribuite norma cu mediile m_i și dispersiile σ_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Să se arate, folosindu-se funcția generatoare a momentelor, că variabila aleatoare

$$\beta = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\,\xi_n,$$

este distribuită normal cu media $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i$ și dispersia $\sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\sigma_i^2$.

SOLUȚIE. Prin definiție, funcția generatoare, este

$$G(\theta) = M(e^{\theta x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculăm mai întîi funcția generatoare pentru variabila aleatoare ξ_i, ce urmează o lege normală de parametrii m_i și σ_i^2,

$$G_{\xi_i}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x_i}\,e^{-\frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}}\,\mathrm{d}x = e^{\theta m_i}\cdot e^{\frac{\theta^2\sigma_i^2}{2}}.$$

Analog

$$G_{a+b\xi_i}(\theta) = e^{\theta a}\,G_{\xi_i}(\theta b) = e^{\theta a}\,e^{\theta b m_i}\,e^{\frac{\theta^2 b^2\sigma_i^2}{2}} = e^{\theta(a+bm_i)}\cdot e^{\frac{\theta^2}{2}(b^2\sigma_i^2)}.$$

Comparînd expresiile $G_{\xi_i}(\theta)$ și $G_{a+b\xi_i}(\theta)$, vedem că $a + b\xi_i$ este distribuită de asemenea normal cu parametrii $a + bm_i$ și $b^2\sigma_i^2$.

Fie $y = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\,\xi_n$. Pentru fiecare $a_i\xi_i$ avem

$$G_{a_i\xi_i}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_i\xi_i\theta} f(x)\,dx = G_{\xi_i}(a_i\,\theta)$$

și deoarece variabilele ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt independente, rezultă că

$$G_y(\theta) = G_{\xi_1}(a_1\theta)\cdot G_{\xi_2}(a_2\theta)\ldots G_{\xi_n}(a_n\,\theta).$$

Însă

$$G_{\xi_i}(\theta) = e^{\theta m_i} e^{\frac{\theta^2\sigma_i^2}{2}},$$

din care

$$G_{a_i\xi_i}(\theta) = e^{a_i\theta m_i} e^{\frac{a_i^2\theta^2\sigma_i^2}{2}}$$

și

$$G_y(\theta) = e^{\theta\sum_{i=1}^{n} a_i m_i} e^{\frac{\theta^2}{2}\Sigma a_i^2\sigma_i^2},$$

de unde rezultă că y este o variabilă normală cu media $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i$ și dispersia $\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$.

21. *Se dau funcțiile caracteristice*:

a) $\frac{1}{4}(1 + e^{it})^2$;

b) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{it}}{2}\right)^{-1}$.

Să se determine funcțiile de repartiție corespunzătoare.

SOLUȚIE. a) Observăm că

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}(1 + e^{it})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{4}e^{2it}.$$

Aceasta este funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ care ia numai valorile 0, 1, 2 cu probabilitățile egale respectiv cu

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$$

Deci funcția ei de repartiție este

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\leqslant 0\\ \frac{1}{4} & , \quad 0<x\leqslant 1,\\ \frac{3}{4} & , \quad 1<x\leqslant 2,\\ 1 & , \quad x>2.\end{cases}$$

b) Dacă dezvoltăm în serie funcția caracteristică, obținem

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{it}}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}e^{it}+\frac{1}{2^3}e^{2it}+\ldots$$

Aceasta este funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ care are repartiția

$$\xi:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \ldots\end{pmatrix}.$$

Acum putem scrie imediat funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ și anume

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2} & , \quad 0<x\leqslant 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^{k+1}} & , \quad n-2<x\leqslant n-1;\ \ n=2,3,\ldots\end{cases}$$

22. *Să se determine funcțiile de repartiție corespunzătoare următoarelor funcții caracteristice*

a) $\cos t$.

b) $\cos^2 t$.

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\cos kt$ *unde* $a_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k=1$.

SOLUȚIE. a) Observăm că

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{it}}{2}.$$

Deci funcția caracteristică se poate scrie

$$\varphi(t) = \cos t = \frac{1}{2} e^{it(-1)} + \frac{1}{2} e^{it(1)}.$$

Această funcție caracteristică (ținînd seama de definiția funcției caracteristice a unei variabile aleatoare simple) corespunde variabilei aleatoare ξ care ia numai valorile -1 și $+1$ cu probabilitatea $\frac{1}{2}$.

Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant -1, \\ \frac{1}{2} & , \quad -1 < x \leqslant 1, \\ 1 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

b) Avem

$$\cos^2 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2.$$

Deci

$$\varphi(t) = \cos^2 t = \frac{1}{4} e^{it(-2)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{it(2)}.$$

Această funcție caracteristică corespunde variabilei aleatoare ξ care ia numai valorile -2, 0, 2, cu probabilitățile respective $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant -2. \\ \frac{1}{4} & , \quad -2 < x \leqslant 0. \\ \frac{3}{4} & , \quad 0 < x \leqslant 2. \\ 1 & , \quad x > 2. \end{cases}$$

c) Observăm că

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} e^{it(-k)} + \frac{a_k}{2} e^{it(k)}\right),$$

are corespunde variabilei aleatoare ξ ce poate lua numai valorile $\pm k$ cu probabilitățile $\frac{a_k}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ a cărei funcție de repartiție se scrie imediat.

23. *Să se determine densitățile de repartiție corespunzătoare funcțiilor caracteristice*

$$\text{a)}\ \varphi(t) = e^{-a^2t^2}.$$

$$\text{b)}\ \varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

SOLUȚIE. a) Vom aplica teorema de inversiune. Putem scrie

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\,\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\,e^{-a^2t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,e^{-a^2t^2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{it}\,e^{-a^2t^2}\,dt.$$

Întrucît $\frac{1 - \cos tx}{it}e^{-a^2t^2}$ este o funcție impară, rezultă că:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{it}\,e^{-a^2t^2}\,dt = 0,$$

și deci

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,e^{-a^2t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin tx}{t}\,e^{-a^2t^2}\,dt.$$

Dacă derivăm în raport cu x, obținem

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos txe^{-a^2t^2}\,dt$$

și

$$F''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} t\sin txe^{-a^2t^2}\,dt.$$

Integrînd prin părți egalitatea care conține pe $F'(x)$, avem

$$F'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos txe^{-a^2t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin tx}{x}\,e^{-a^2t^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{2a^2}{\pi x}\int_{0}^{\infty} t\sin txe^{-a^2t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{2a^2}{x}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} t\sin txe^{-a^2t^2}\,dt\right) = -\frac{2a^2}{x}F''(x).$$

Am obținut astfel ecuația diferențială

$$F'(x) = -\frac{2a^2}{x}F''(x).$$

Avem deci

$$\frac{F''(x)}{F'(x)} = -\frac{x}{2a^2}.$$

Integrînd, obținem

$$\ln F'(x) = -\frac{x^2}{4a^2} + \ln C_1;\ F'(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{4a^2}}.$$

Integrînd încă o dată această ecuație, obținem

$$F(x) = C_1 \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{4a^2}} du + C_2.$$

Dacă ținem acum seamă că $F(x)$ este funcție de repartiție, putem determina constantele C_1 și C_2 din condițiile

$$F(-\infty) = 0,$$

$$F(+\infty) = 1.$$

Deci

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4a^2}} du} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}},$$

$$F(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{4a^2}} du.$$

De aici avem imediat densitatea

$$f(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}.$$

Observație. Se vede că avem o lege normală $N(0, \sigma)$ în care $\sigma = a\sqrt{2}$.

b) Dacă $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, atunci printr-o dezvoltare într-o serie obținem

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ikx}.$$

Aplicînd teorema de inversiune sub forma

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-itk}}{it} \varphi(t)\, dt, \qquad x > 0$$

obținem

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itk} - e^{it(k-x)}}{it} dt =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{\pi t} dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin t(k-x)}{t} dt \right).$$

Cum $x>0$, rezultă că

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{\pi t}\, dt = \frac{1}{2}$$

și de aici urmează că

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\sin t\,(k-x)}{\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\sin t\,(k-x)}{\pi t}\, dt - e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\sin t\,(k-x)}{\pi t}\, dt.$$

Cum avem egalitățile

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t\,(k-x)}{\pi t}\, dt = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{dacă } k < x, \\ 0 & \text{dacă } k = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } k > x. \end{cases}$$

și

$$1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!},$$

obținem

$$F(x) - F(0) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

De aici se vede că se obține funcția de repartiție a unei variabile Poisson și prin urmare, funcția caracteristică dată, corespunde variabilei aleatoarei ξ cu

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!};\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

24. *Să se afle densitatea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice*

$$\varphi(t) = e^{-|t|}.$$

SOLUȚIE. Aplicînd formula de inversiune a funcției caracteristice, scrisă cu ajutorul densității, obținem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, e^{-itx}\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{t}\, e^{-itx}\, dt + \int_0^{\infty} e^{-t}\, e^{itx}\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \left[e^{itx} + e^{-itx} \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos tx\, dt.$$

Integrînd prin părți ultima integrală, avem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(-e^{-t} \cos tx \right) \Big|_0^{\infty} - \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin tx\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \left(\frac{x}{\pi} e^{-t} \sin tx \right) \Big|_0^{\infty} - \frac{x^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos tx\, dt,$$

de unde urmează că

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - x^2 f(x),$$

sau că

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Observație. Se vede că avem de-a face cu o variabilă aleatoare ce urmează o lege Cauchy.

25. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare care ia valoarea* j $(j = 0, 1, \ldots)$ *cu probabilitatea* p_j, *adică*

$$P(\xi = j) = p_j.$$

Să notăm

$$P(\xi > j) = q_j$$

și deci

$$q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots, \; k \geqslant 0$$

Să introducem funcțiile generatoare corespunzătoare. Avem

$$G(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots$$

$$H(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \ldots$$

Să se arate că pentru $-1 < s < 1$, *avem*

$$H(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}.$$

SOLUȚIE. Avem,

$$q_k = 1 - p_0 - p_1 - \ldots - p_k.$$

Atunci

$$H(s) = (1 - p_0) + (1 - p_0 - p_1)\, s + (1 - p_0 - p_1 - p_2)\, s^2 + \ldots =$$
$$= (1 + s + s^2 + \ldots) - p_0 (1 + s + s^2 + \ldots) - p_1 (s + s^2 + \ldots) -$$
$$- p_2 (s^2 + s^3 + \ldots) \ldots$$

sau

$$H(s) = \frac{1}{1-s} - p_0 \frac{1}{1-s} - p_1 \frac{s}{1-s} - p_2 \frac{s^2}{1-s} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-s} [1 - p_0 - p_1 s - p_2 s^2 - \ldots] = \frac{1}{1-s} [1 - G(s)].$$

Deci

$$H(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}.$$

26. *În cazul exercițiului de mai înainte să se arate că*

a) $M(\xi) = G'(1) = H(1)$.

b) $M_2(\xi) = G''(1) + G'(1) = 2H'(1) + H(1)$.

SOLUȚIE. a) Avem (din definiția valorii medii)

$$M(\xi) = G'(1).$$

Am văzut însă că (vezi exercițiul 25)

$$1 - G(s) = (1 - s)\, H(s).$$

Derivînd, avem

$$-G'(s) = -H(s) + (1-s)H'(s). \tag{1}$$

Pentru $s = 1$ obținem

$$G'(1) = H(1)$$

și deci

$$M(\xi) = G'(1) = H(1).$$

b) Avem

$$M_2(\xi) = \sum k^2 p_k = \sum k(k-1)\, p_k + \sum k p_k. \tag{2}$$

Derivînd încă o dată relația (1), obținem

$$-G''(s) = -H'(s) - H'(s) + (1 - s)\, H''(s),$$

iar pentru $s = 1$, avem

$$G''(1) = 2H'(1).$$

Din relația (2) rezultă că

$$M_2(\xi) = 2H'(1) + H(1),$$

deoarece $\Sigma k p_k = H(1)$.

Rezultă că

$$M_2(\xi) = G''(1) + G'(1) = 2H'(1) + H(1).$$

28. *Fie ξ și η două variabile aleatoare independente distribuite Poisson cu parametrul λ și respectiv μ. Se cere:*

a) *să se arate că variabila $\xi + \eta$ urmează o distribuție Poisson de parametru $\lambda + \mu$.*

b) *să se arate că variabila $\xi - \eta$ nu urmează o distribuție Poisson.*

SOLUȚIE. a) Funcția generatoare de momente a unei variabile aleatoare ξ ce urmează o lege Poisson cu parametrul λ, este

$$G_\xi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda}\, e^{e^t \lambda} = e^{\lambda (e^t - 1)}.$$

Pentru variabilele independente ξ și η, fiecare dintre ele dînd naștere la o distribuție Poisson cu parametrii respectiv λ și μ, avem

$$G_{\xi+\eta}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\, e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)},$$

care este funcția generatoare de momente a unei variabile ce dă naștere unei legi Poisson cu parametru $\lambda + \mu$.

b) Avem

$$G_{\xi-\eta}(t) = G_{\xi}(t)\, G_{\eta}(-t) = e^{\lambda(e^t-1)}\, e^{\mu(e^{-t}-1)},$$

expresie ce nu poate fi adusă la o formă care să reprezinte funcția generatoare a unei variabile Poisson.

28. *Cu ajutorul funcției generatoare să se afle repartiția variabilei* $u = xy$, *unde*

$$f(x, y) = xe^{-x(1+y)}, \quad (0, +\infty).$$

SOLUȚIE. Să scriem funcția generatoare. Avem

$$g(\theta, u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{0xy}\, xe^{-x-xy}\, dxdy = \int_0^\infty e^{-x}\left[\int_0^\infty xe^{-xy(1-0)}\, dy\right]dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-\theta}\, dx = \frac{1}{1-\theta}\int_0^\infty e^{-x}\, dx = (1-\theta)^{-1}.$$

Comparînd rezultatul obținut cu repartiția gamma, se obține că

$$f(u) = e^{-u} \quad ; \quad (0, +\infty).$$

29. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare independente care urmează o lege Poisson de parametru* λ_1, *și respectiv* λ_2. *Să se arate că distribuția lui* ξ *condiționată, de* $\xi + \eta$ *este o distribuție binomială, și anume*

$$P\{\xi = k \mid \xi + \eta = n\} = b\left(k; n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

SOLUȚIE. Deoarece variabilele ξ și η sînt independente urmează că

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

ceea ce arată că variabila $\xi + \eta$ urmează o lege Poisson de parametru $\lambda_1 + \lambda_2$, deci

$$P(\xi + \eta = n) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Prin definiție

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = n) = \frac{P(\xi = k) \cdot P(\eta = n-k)}{P(\xi + \eta = n)} =$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k},$$

de unde

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k},$$

sau

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = n) = b\left(k\,;\, n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

30. *Fie ξ_1 și ξ_2 două variabile aleatoare cu valori întregi pozitive sau nule. Densitatea perechii (ξ_1, ξ_2) fiind dată de*

$$p_{jk} = P(\xi_1 = j, \xi_2 = k),$$

funcția generatoare corespunzătoare se definește prin

$$G(s_1, s_2) = \sum_{j,k} p_{jk} s_1^j s_2^k.$$

Se cere:

a) *să se determine funcțiile generatoare $G_1(s_1)$ și $G_2(s_2)$ ale variabilelor ξ_1 și ξ_2;*

b) *să se determine funcția generatoare $G_{1,2}(s)$ a variabilei $\xi_1 + \xi_2$;*

c) *să se arate că variabilele ξ_1 și ξ_2 sînt independente dacă și numai dacă $G(s_1, s_2) = G_1(s_1) \cdot G_2(s_2)$.*

SOLUȚIE. a) Fie $p_j = P\{\xi_1 = j\}$. Deci

$$p_j = \sum_k p_{jk}$$

și

$$G_1(s_1) = \sum_j \left(\sum_k p_{jk}\right) s_1^j = \sum_{j,k} p_{jk} s_1^j,$$

sau

$$G_1(s_1) = G(s_1, 1).$$

Analog

$$G_2(s_2) = G(1, s_2).$$

b) Fie

$$c_l = P\{\xi_1 + \xi_2 = l\} = \sum_{\substack{j,k \\ (j+k=l)}} p_{jk}.$$

Urmează că

$$G_{1,2}(s) = \sum_l c_l \cdot s^l = \sum_l \sum_{\substack{j,k \\ (j+k=l)}} p_{jk}) s^l = \sum_{j,k} p_{jk} s^j s^k.$$

sau

$$G_{1,2}(s) = G(s, s).$$

c) A spune că ξ_1 și ξ_2 sînt independente este echivalent cu

$$p_{jk} = p_j q_k$$

unde

$$q_k = P\{\xi_2 = k\}.$$

Deci

$$G(s_1, s_2) = \sum_{j,k} p_j q_k s_1^j s_2^k$$

sau

$$G(s_1, s_2) = \left(\sum_j p_j s_1^j\right)\left(\sum_k q_k s_2^k\right)$$

și

$$G(s_1, s_2) = G_1(s_1) \cdot G_2(s_2).$$

31. *Să se determine funcțiile generatoare corespunzătoare variabilei* ξ *pentru care se știe*

a) $P(\xi \leqslant n)$.
b) $P(\xi < n)$.
c) $P(\xi \geqslant n)$.

SOLUȚIE. a) Să observă că

$$P(\xi \leqslant n) + P(\xi > n) = 1. \tag{1}$$

Știm însă că, notînd $P(\xi > j) = q_j$ obținem o funcție generatoare

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$$

și atunci dacă

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$$

unde $p_j = P(\xi = j)$, avem relația

$$Q(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}.$$

Înmulțind relația (1) cu s^n și sumînd pentru diversele valori ale lui n, obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \leqslant n) s^n + Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n.$$

Cum $|s| < 1$ rezultă că

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \leqslant n)\, s^n = \frac{1}{1-s} - \frac{1-G(s)}{1-s}.$$

În definitiv

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \leqslant n)\, s^n = \frac{1}{1-s} \cdot G(s).$$

b) Să observăm că

$$P(\xi < n) + P(\xi = n) + P(\xi > n) = 1.$$

Înmulțind cu s^n și sumînd, avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi < n)\, s^n + G(s) + Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi < n)\, s^n = \frac{1}{1-s} - G(s) - \frac{1-G(s)}{1-s},$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi < n)\, s^n = \frac{s}{1-s} G(s).$$

c) Avem

$$P(\xi \geqslant n) + P(\xi < n) = 1.$$

Procedînd în mod analog se obține că

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi \geqslant n)\, s^n = \frac{1-sG(s)}{1-s}.$$

32. *Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei funcție generatoare este $G(s)$. Să se determine funcțiile generatoare corespunzătoare variabilelor $\xi + 1$ și 2ξ.*

SOLUȚIE. Știm că

$$G_\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

unde

$$p_n = P(\xi = n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Să observăm că probabilitățile variabilei $\xi + 1$ vor fi

$$P(\xi + 1 = n) = P(\xi = n - 1) = p_{n-1}$$

și deci funcția generatoare este dată de

$$G_{\xi+1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} s^n = s \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} s^{n-1},$$

de unde rezultă că

$$G_{\xi+1}(s) = sG_{\xi}(s).$$

Analog să observăm că

$$P(2\xi = n) = p_{2n}.$$

Deci

$$G_{2\xi}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} s^n = G_{\xi}(s^2).$$

33. *Fie* $\{\xi_n\}$ *un șir de variabile aleatoare independente, care iau valorile* $0, 1, 2, \ldots, a-1$ *cu probabilitățile* $\frac{1}{a}$. *Fie*

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Se cere să se calculeze funcția generatoare a variabilei S_n *și funcția generatoare corespunzătoare probabilităților* $P(S_n \leqslant y)$.

SOLUȚIE. Cum $\{\xi_n\}$ sînt variabile aleatoare independente, rezultă că

$$G_{S_n}(s) = [G_{\xi_i}(s)]^n.$$

Însă

$$G_{\xi_i}(s) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{a-1} s^n = \frac{1 - s^a}{a(1-s)},$$

deci

$$G_{S_n}(s) = \left[\frac{1 - s^a}{a(1-s)}\right]^n.$$

Se observă imediat că

$$P(S_n \leqslant j) + P(S_n > j) = 1.$$

Înmulțind cu s^n și sumînd, se obține

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(S_n \leqslant j) s^j = \frac{1}{1-s} G_{S_n}(s).$$

34. *Cu ajutorul funcției generatoare să se stabilească în ce condiții repartiția binomială, cu exponent negativ, converge către repartiția Poisson.*

SOLUȚIE. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare independente, care urmează o repartiție binomială cu exponent negativ. Avem, dacă ξ_k reprezintă experiența de ordinul k,

$$P(\xi_k = k + n) = C_{k+n-1}^{n} p_k^k q_k^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

unde $0 < p_k < 1$ și $q_k = 1 - p_k$.

Să examinăm acum variabila aleatoare.

$$\xi_k^* = \xi_k - k.$$

Se observă imediat că funcția generatoare a variabilei ξ_k este

$$G_{\xi_k}(z) = \left[\frac{z(1-q_k)}{1-zq_k}\right]^k$$

și deci funcția generatoare a variabilei ξ_k^* este dată de

$$G_{\xi_k^*}(z) = \left[\frac{1-q_k}{1-zq_k}\right]^k$$

având valoarea medie

$$M(\xi_k^*) = M(\xi_k) - k = \frac{k}{p_k} - k = \frac{(1-p_k)k}{p_k} = \frac{kq_k}{p_k},$$

Acum dacă $k \to \infty$ și $q_k \to 0$ astfel încît $kq_k \to \lambda$, atunci $p_k = 1 - q_k \to 1$ și

$$\lim_{k\to\infty} \frac{kq_k}{p_k} = \lambda$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} M(\xi_k^*) = \lambda.$$

Atunci

$$\lim_{k\to\infty} G_{\xi_k^*}(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{(1-q_k)^k}{(1-q_k z)^k} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda z}} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Deci, dacă $k \to \infty$, $q_k \to 0$ și $kq_k \to \lambda$ atunci repartiția binomială cu exponent negativ, converge către repartiția Poisson.

35. *Aruncăm cu o monedă de atîtea ori pînă cînd numărul de apariții a celor două fețe este egal. Numărul de aruncări necesare îl considerăm ca o variabilă aleatoare* ξ.

Să se arate că:

a) $P_{2n} = P(\xi = 2n) = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n2^{2n-1}}$; $\qquad n = 1, 2, \ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = 1$.

c) $M(\xi) = +\infty$.

SOLUȚIE. Să notăm cu Q_{2n} probabilitatea ca din $2n$ aruncări de n ori să ne apară o față și de n ori cealaltă față. Atunci

$$Q_{2n} = P_{2n} + P_{2n-2}Q_2 + P_{2n-4}Q_4 + \ldots + P_2 Q_{2n-2}.$$

Fie acum

$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n} z^{2n},$$

și

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} z^{2n}$$

atunci se vede că

$$P(z) = \frac{Q(z)}{1 + Q(z)}.$$

a) Însă, se vede că

$$Q_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot C_{2n}^{n}.$$

Atunci

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} - 1$$

și deci

$$P(z) = 1 - \sqrt{1 - z^2}.$$

Dezvoltînd în serie se obține imediat că

$$P_{2n} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}}.$$

b) Se știe că

$$P(1) = 1$$

rezultă atunci că

$$P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = 1.$$

c) Pentru calculul valorii medii avem

$$M(\xi) = P'(1).$$

Însă

$$P'(z) = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Atunci

$$P'(1) = +\infty$$

și deci

$$M(\xi) = +\infty.$$

36. *Dintr-o urnă conținînd bile albe și bile negre se fac extracții succesive, de fiecare dată punîndu-se bila extrasă înapoi în urnă. Se extrage o bilă albă cu probabilitatea p iar o bilă neagră cu probabilitatea $q = 1 - p$.*

Fie ξ o variabilă aleatoare care ia valoarea n dacă pentru prima oară obținem o bilă albă, urmată de una neagră în extracțiile de rang $n-1$ și n.

Se cere: a) *Funcția generatoare a variabilei ξ.*

b) *Valoarea medie și dispersia variabilei ξ.*

SOLUȚIE. Succesiunea cea mai generală care poate conduce la apariția unei bile albe, urmată de una neagră, la extracțiile $n-1$ și n, este

$$\underbrace{NN \ldots NA}_{\xi_1} \qquad \underbrace{AA \ldots AN}_{\xi_2}$$

unde am notat prin $A(N)$ apariția unei bile albe (negre).

Se poate scrie $\xi = \xi_1 + \xi_2$, unde ξ_1 (ξ_2) va fi variabilă aleatoare egală cu rangul extracției în care s-a obținut prima bilă albă (neagră). ξ_1 și ξ_2 sînt variabile independente: funcția generatoare a variabilei ξ va fi deci egală cu produsul funcțiilor generatoare corespunzătoare variabilelor ξ_1 și ξ_2.

Deoarece $P(\xi_1 = k) = q^{k-1}p$, funcția generatoare a variabilei ξ_1 este

$$G_{\xi_1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}ps^k = ps \sum_{k=1}^{\infty} (qs)^{k-1} = \frac{ps}{1-qs}.$$

Deoarece $P(\xi_2 = l) = p^{l-1}q$, funcția generatoare a variabilei ξ_2 este

$$G_{\xi_2}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} p^{l-1} \cdot qs = qs \sum_{l=1}^{\infty} (ps)^{l-1} = \frac{qs}{1-ps}.$$

Urmează că

$$G_{\xi}(s) = \frac{pqs^2}{(1-qs)(1-ps)}.$$

b) Se știe că valoarea medie a lui ξ este dată de $G'_{\xi}(1)$, fie că e finită sau nu, și dacă dispersia este finită, ea este dată de

$$D^2(\xi) = G''_{\xi}(1) + G'_{\xi}(1) - (G'_{\xi}(1))^2$$

în timp ce dacă este infinită, $G''_{\xi}(s)$ tinde la infinit cînd s tinde către 1.

Avem:

$$G'_{\xi}(s) = \frac{pqs(2-s)}{(1-qs)^2(1-ps)^2}$$

$$G''(s) = \frac{2pq(1+pqs^2-3pqs^3)}{(1-qs)^3(1-ps)^3}.$$

Cînd s tinde către 1, $G''_{\xi}(s)$ tinde către $\frac{2(1-2pq)}{p^2q^2}$.

Prin urmare ξ are o dispersie și de asemenea o valoare medie finită

$$M(\xi) = G'_\xi(1) = \frac{1}{pq},$$

$$D^2(\xi) = \frac{1 - 3pq}{p^2q^2}.$$

Se poate calcula direct $P\{\xi = n\}$. Într-adevăr, pentru a avea $\xi = n$, trebuie să nu obținem decît bile negre pînă la extracția de rang k, bile albe de la extracția de rang $k + 1$ la extracția de rang $n - 1$ apoi o bilă neagră, unde k variază de la 0 la $n - 2$.

Avem

$$P(\xi = n) = \sum_{k=0}^{n-2} q^k p^{n-k-2} pq = pq^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^k,$$

de unde

$$P\{\xi = n\} = \frac{pq(q^{n-1} - p^{n-1})}{q - p}.$$

Calculînd funcția generatoare corespunzătoare variabilei ξ obținem

$$G_\xi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{pq(q^{n-1} - p^{n-1})s^n}{q - p} = \frac{pqs}{q - p} \sum_{n=1}^{\infty} [(qs)^n - (ps)^n],$$

de unde

$$G_\xi(s) = \frac{pqs^2}{(1 - qs)(1 - ps)}.$$

37. *Fie $\{X_i\}$ un șir de variabile aleatoare independente, urmînd aceeași lege.*

Se notează prin $\varphi(t)$ și $\lg \varphi(t) = \psi(t)$ prima și a doua funcție caracteristică a acestei legi comune.

Se consideră variabila $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, unde N este o variabilă aleatoare (cu valori întregi pozitive sau nule) independentă de X_i în ansamblul lor și de funcție generatoare

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u^n,$$

u putînd fi complex.

Se cere:

a) *Să se determine funcția caracteristică a varabilei Z, condiționată de N, N fiind cunoscut. Să se determine funcția caracteristică $\Phi(t)$ a variabilei Z;*

b) *Fie μ_1, μ_2, μ_3 respectiv valoarea medie, dispersia și momentul centrat de ordinul al treilea al variabilei N, despre care presupunem că există.*

Să se exprime cu ajutorul acestor $\mu_i (i = 1, 2, 3)$ *dezvoltarea în serie a* $\lg(G(u))$ *limitată la primii trei termeni, în funcție de* $v = \lg u$, *în jurul lui* $v = 0$. *Să se exprime*

$$M(Z),\ D^2(Z) \text{ și } M[(Z - M(Z))^3]$$

în funcție de μ_1, μ_2, μ_3 *și momentele* μ_1', μ_2', μ_3' *corespunzătoare legii lui* X_i, *folosindu-ne de* $\lg\Phi(t)$.

c) *Dacă N urmează o lege Poisson de medie* λ *să se arate că*

$$\lg\Phi(t) = \lambda \cdot [\varphi(t) - 1].$$

Să se determine repartiția lui Z, dacă X_i *sînt variabile caracteristice ale unui eveniment A ce se realizează cu probabilitatea p în cursul repetării succesive ale unei probe.*

Reciproc, să se arate că dacă N și Z sînt repartizate Poisson de parametri λ *și respectiv* μ, *legea lui* X_i *este necesară de tipul celeia de mai înainte cu* $p = \mu/\lambda$.

d) *Presupunem că* $X_i = 1$ *dacă A se produce, și* $X_i = 0$ *în caz contrar. Să se arate că dacă N urmează o lege Poisson, variabilele Z și N — Z, adică numărul de realizări ale lui A, și numărul de nerealizări, sînt variabile independente. Reciproc, să se arate că Z și N — Z nu pot fi independente decît dacă Z urmează o lege Poisson.*

e) *Mai general, proba admite un sistem de k componente* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *și în cursul a N probe succesive (N aleator)* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ *sînt realizările lui* $A_1, A_2, \ldots, A_k$; *variabilele* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ *sînt independente dacă, și numai dacă N urmează o lege Poisson.*

SOLUȚIE. a) Z_N este o sumă de N variabile aleatoare independente, fiecare avînd funcția caracteristică $\varphi(t)$. Dacă presupunem $N = n$, avem

$$\varphi_{Z|N=n}(t) = [\varphi(t)]^n.$$

Prin definiție

$$\Phi(t) = M_Z(e^{itz}) = M_N[M_Z(e^{itz} \mid N = n)] =$$
$$= M_N(\varphi_{Z|N=n}(t)) = \sum_{n \geqslant 0} g_n(\varphi(t))^n,$$

de unde

$$\Phi(t) = G(\varphi(t)).$$

b) Dacă $v = \lg u$, atunci $\lg(G(u)) = \lg(G(e^v))$.

Această funcție este a doua funcție caracteristică a lui N unde s-a făcut $v = it$.

Urmează că

$$\lg(G(e^v)) = \mu_1 v + \mu_2 \frac{v^2}{2!} + \mu_3 \frac{v^3}{3!} + 0(v^3).$$

Pe de altă parte

$$\psi(t) = \lg(\Phi(t)) = \mu_1''(it) + \frac{\mu_2''}{2!}(it)^2 + \frac{\mu_3''}{3!}(it)^3 + 0(t^3)$$

și

$$\lg(\Phi(t)) = \lg[G(\varphi(t))] = \lg[G(e^{\psi(t)})].$$

Făcînd

$$v = \psi(t) = \mu_1'(it) + \mu_2'\frac{(it)^2}{2!} + \mu_3'\frac{(it)^3}{3!} + 0(t^3)$$

și identificînd cele două expresii ale lui $\lg(\Phi(t))$ găsim

$$M(z) = \mu_1'' = \mu_1\mu_1',$$

$$D^2(z) = \mu_2'' = \mu_1\mu_2' + \mu_2\mu_1'^2,$$

$$M[(z - M(z))^3] = \mu_3'' = \mu_3 \cdot \mu_1'^3 + 3\mu_1'\mu_2'\mu_2 + \mu_3\mu_1'^3.$$

Prin calculul direct, obținem

$$M(Z) = M_N[M(Z|N)] = M_N[N\mu_1'] = \mu_1' M_N(N),$$

$$M(Z) = \mu_1' \cdot \mu_1,$$

$$D^2(Z) = M_N(D^2(Z|N)) + M_N\{[M(Z|N) - M(Z)]^2\} =$$

$$= M_N\left(\sum_{i=1}^{N} D^2(X_i)\right) + M_N[M^2(Z|N) - 2M(Z)M(Z|N) + M^2(Z)] =$$

$$= M_N(N\mu_2') + M_N[N^2\mu_1'^2 - 2\mu_1' \cdot \mu_1 \cdot N\mu_1' + \mu_1^2\mu_1'^2].$$

$$D^2(z) = \mu_1 \cdot \mu_2' + \mu_2\mu_1'^2.$$

c) Avem

$$G(u) = \sum_{n\geqslant 0} g_n u^n = e^{-\lambda}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\lambda u)^n}{n!} = e^{\lambda(u-1)},$$

$$\psi(t) = \lg(\Phi(t)) = \lg[G(\varphi(t))] = \lg(e^{\lambda(\varphi(t)-1)}),$$

de unde

$$\psi(t) = \lambda(\varphi(t) - 1).$$

Dacă X_i sînt variabilele aleatoare asociate evenimentului A de probabilitate p

$$\varphi(t) = pe^{it} + q, \quad (q = 1 - p)$$

de unde

$$\psi(t) = \lambda p\,(e^{it} - 1),$$

$\psi(t)$ este deci a doua funcție caracteristică a legii Poisson de parametri (λp). Urmează că Z este o variabilă ce urmează o lege Poisson de parametru λp.

Reciproc, dacă Z și N urmează legii Poisson, avem

$$\lambda(\varphi(t) - 1) = \mu(e^{it} - 1),$$

de unde

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\lambda} \cdot e^{it} + 1 - \frac{\mu}{\lambda}.$$

Presupunînd $\mu \leqslant \lambda$, obținem funcția caracteristică a variabilei indicator cu $p = \mu/\lambda$.

d) Pentru a arăta că variabilele Z și $N - Z$ sînt independente, este necesar și suficient să arătăm că funcția generatoare a perechii $(Z, N - Z)$ este egală cu produsul funcțiilor generatoare a lui Z și $N - Z$.

Dar

$$\{Z \text{ și } N - Z \text{ independente}\} \Leftrightarrow M(u^Z v^{N-Z}) = M(u^Z)\, M(v^{N-Z}) \qquad (1)$$

$$M(u^Z v^{N-Z}) = M_N[M(u^Z v^{N-Z} \mid N)] =$$

$$= M_N[M(u^{\sum_i X_i} v^{\sum_i X_i} \mid N)] = M_N\{M[\prod_i u^{X_i} v^{X_i} \mid N]\},$$

de unde

$$M[u^Z v^{N-Z}] = M_N[(up + vq)^N],$$

deoarece perechile (X_i, X_i') sînt independente între ele și au ca funcție generatoare $up + vq$.

Analog

$$M(u^Z) = M_N[(up + q)^N],$$
$$M(v^{N-Z}) = M_N[(p + qv)^N].$$

Egalitatea (1) este echivalentă cu

$$\Big[\sum_{n\geqslant 0} g_n (pu + q)^n\Big] \cdot \Big[\sum_{m\geqslant 0} g_m (p + qv)^m\Big] = \sum_{k\geqslant 0} g_k (pu + qv)^k.$$

$G(u) = \sum_{n\geqslant 0} g_n u^n$ fiind funcția generatoare a variabilei N, este o funcție analitică pentru $|u| \leqslant 1$ și în consecință derivabilă în acest domeniu.

Ecuația devine

$$G(pu + q)\, G(p + qv) = G(pu + qv) \text{ cu } \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 0 \leqslant v \leqslant 1. \end{cases}$$

Punem

$$x = pu + q,$$
$$y = p + qv,$$

de unde

$$q \leqslant x \leqslant 1,$$
$$p \leqslant y \leqslant 1.$$

Ecuația devine

$$G(x)\,G(y) = G(x + y - 1).$$

Derivînd această identitate în raport cu y, obținem

$$G(x)\,G'(y) = G'(x + y - 1).$$

Făcînd $y = 1$ obținem $G(x)\ G'(1) = G'(x)$, de unde

$$G(x) = Ke^{\lambda x}.$$

Deoarece $G(1) = 1$,

$$G(x) = e^{\lambda(x-1)}$$

G este funcția generatoare a unei legi Poisson. S-a obținut dacă N urmează o repartiție Poisson, Z și $N - Z$ au funcțiile generatoare $e^{\lambda p(u-1)}$ și respectiv $e^{\lambda q(v-1)}$ și perechea $(Z, N - Z)$ are funcția generatoare $e^{\lambda(pu+qv)-\lambda}$, produsul celor două procente. Urmează că Z și $N - Z$ sînt independente.

Reciproc, faptul că Z și $N - Z$ sînt independente, implică că funcția generatoare a lui Z este de forma $e^{\lambda p(u-1)}$, deci că Z urmează o lege Poisson. Deoarece $N - Z$ urmează de asemenea o lege Poisson, rezultă că și $N = Z + (N - Z)$ urmează o lege Poisson.

e) Demonstrăm proprietatea prin recurență. Presupunem că este adevărată pentru $k - 1$ componente. Considerăm că $Z_1, \ldots, Z_k$ sînt independente. Atunci $Z = Z_k$ și $Z' = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{k-1}$ sînt independente. Punînd $A = A_k$ și $A' = \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ sîntem în condițiile punctului d.

Deci N necesar urmează o lege Poisson.

Reciproc, dacă N urmează o lege Poisson, avem

$$M[u_1^{Z_1} \ldots u_k^{Z_k}] = M_{Z_k}[M(u_1^{Z_1} \ldots u_k^{Z_k} | Z_k)].$$

Am ajuns în cazul a $(k - 1)$ variabile aleatoare indicatoare $Z_1, \ldots, Z_{k-1}$.

Deci expresia de mai înainte devine

$$M_{Z_k}[M(u_1^{Z_1} | Z_k) \ldots M(u_{k-1}^{Z_{k-1}} | Z_k) \cdot u_k^{Z_k}]$$

sau

$$M(u_1^{Z_1}) \ldots M(u_k^{Z_k}),$$

de unde rezultă independența variabilelor Z_k. Deci proprietatea este adevărată pentru toți k.

38. *Se știe că dacă ξ și η sînt două variabile aleatoare independente atunci*

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t).$$

Să se arate că proprietatea inversă nu are loc totdeauna.

SOLUȚIE. Fie vectorul aleator (ξ, η) care are densitatea de repartiție dată de expresia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \text{ și } |y| \leqslant 1, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să arătăm mai întîi că variabilele ξ și η sînt dependente.

Într-adevăr, densitatea de repartiție marginală a lui ξ este

$$f_1(x) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}[1 + xy(x^2 - y^2)]\,dy = \frac{1}{4}\left(y + \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{4}xy^4\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Analog obținem densitatea de repartiție marginală a lui η și avem

$$f_2(y) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}[1 + xy(x^2 - y^2)]\,dx = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}x^4y - \frac{1}{2}x^2y^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Urmează de aici că

$$f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{4} \neq f(x,y)$$

și deci variabilele ξ și η sînt dependente.

Să găsim acum densitatea de repartiție a variabilei aleatoare

$$\zeta = \xi + \eta.$$

Se știe că

$$f_3(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,dx.$$

Dat fiind că $f(x,y) \neq 0$ pe domeniul $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $f(x, z-x)$ va fi diferită de zero pe domeniul $|x| \leqslant 1$; $|z - x| \leqslant 1$ domenii pe care le reprezentăm grafic în fig. 28 *a* și 28 *b*.

Dacă $z \leqslant 0$ atunci $z - 1 \leqslant -1$ iar $z + 1 \leqslant 1$.

Așadar

$$f_3(z) = \int_{-1}^{z+1} f(x, z-x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{z+1}(1 - xz^3 + 3z^2x^2 - 2zx^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(2 + z) \quad \text{dacă} \quad -2 \leqslant z \leqslant 0.$$

Dacă $z \geqslant 0$, atunci $z - 1 \geqslant -1$, $z + 1 \geqslant 1$ și de aici urmează că

$$f_3(z) = \int_{z-1}^{1} f(x, z-x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{z-1}^{1}(1 - xz^3 + 3z^2x^2 - 2zx^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}(2 - z) \quad \text{dacă} \quad 0 \leqslant z \leqslant 2.$$

Densitatea de repartiție a variabilei $\zeta = \xi + \eta$ este deci

$$f_3(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2+z) & \text{dacă } -2 \leqslant z \leqslant 0, \\ \frac{1}{4}(2-z) & \text{dacă } 0 \leqslant z \leqslant 2, \\ 0 & \text{dacă } |z| > 2. \end{cases}$$

Calculăm acum funcțiile caracteristice ale variabilelor ξ, η și ζ pe care le notăm respectiv cu $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ și $\varphi_3(t)$

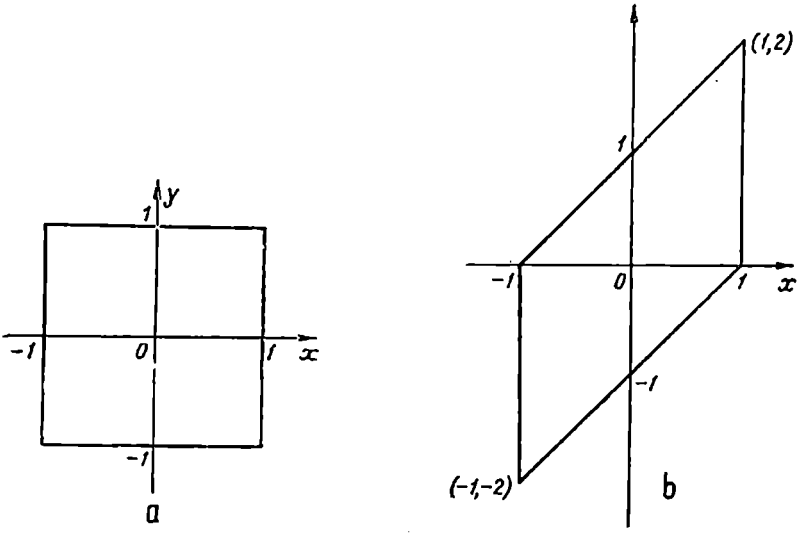


Fig. 28.

Avem

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}\,dx = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}.$$

Analog

$$\varphi_2(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Pentru ζ găsim

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(2+z)\,e^{itz}\,dz + \frac{1}{4}\int_{0}^{2}(2-z)\,e^{itz}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2 - e^{2it} - e^{-2it}}{t^2} = \frac{1}{2t^2}\left(1 - \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}\right) = \frac{1}{2t^2}(1 - \cos 2t).$$

Deci

$$\varphi_3(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

și prin urmare

$$\varphi_3(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$$

adică funcția caracteristică a unei sume de două variabile aleatoare este egală cu produsul funcțiilor caracteristice, deși variabilele sînt dependente.

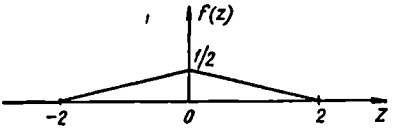


Fig. 29.

Observație. Densitatea de repartiție

$$f_3(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 + |z|) & |z| \leqslant 2 \\ 0 & |z| > 2 \end{cases}$$

are graficul din fig. 29.

O astfel de repartiție se numește repartiție triunghiulară.

39. *Fie ξ o variabilă aleatoare care ia valorile $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(2n+1), \ldots$ și pentru $n = 0, 1, \ldots$ să punem*

$$p_{2n+1} = P(\xi = 2n+1) = p_{-(2n+1)} = P(\xi = -(2n+1)) = \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2}.$$

De asemenea fie η o altă variabilă aleatoare care ia valorile $0, \pm 2, \pm 6, \pm \ldots \pm (4k+2), \ldots$ cu probabilitățile

$$q_0 = P(\eta = 0) = \frac{1}{2},$$

$$q_{4k+2} = P(\eta = 4k+2) = P(\eta = -(4k+2)) = q_{-(4k+2)} = \frac{2}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

dacă $k = 0, 1, \ldots$

Se cere să se scrie funcțiile caracteristice ale celor două variabile aleatoare și să se compare.

SOLUȚIE. Să scriem funcția caracteristică a variabilei ξ. Pentru aceasta să reamintim următoarea relație

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Funcția caracteristică este dată de

$$\varphi_\xi(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}. \tag{1}$$

Se vede că $\varphi_\xi(t)$ este o funcție periodică. Dacă $0 \leqslant t \leqslant \pi$ atunci

$$\varphi_\xi(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}.$$

Dezvoltînd în serie Fourier funcția

$$f(t) = 1 - \frac{2|t|}{\pi}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi,$$

cum funcția este pară obținem

$$a_0 = 0 \text{ și } a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{2|t|}{\pi}\right)\cos kt\,dt = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 k^2} \text{ dacă } k = 2n+1, \\ 0 \text{ dacă } k = 2n. \end{cases}$$

Deci seria (1) nu este decît dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(t)$. Deci

$$\varphi_\xi(t) = f(t).$$

Funcția caracteristică a variabilei η se scrie imediat. Mai întîi să observăm că

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = 1.$$

Atunci

$$\varphi_\eta(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(4k+2)t}{(2k+1)^2}.$$

Se vede că dacă $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, atunci

$$\varphi_\eta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_\xi(2t) = \frac{1 + 1 - \frac{4|t|}{\pi}}{2} = 1 - \frac{2|t|}{\pi}.$$

Rezultă că

$$\varphi_\eta(t) = \varphi_\xi(t).$$

Dacă $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$ atunci se vede că

$$\varphi_\eta(t) = -\varphi_\xi(t) = |\varphi_\xi(t)|.$$

Deci pentru orice valoare a lui t avem

$$\varphi_\eta(t) = |\varphi_\xi(t)|.$$

Cu toate acestea repartițiile variabilelor ξ și η sînt diferite. Deci dacă două funcții caracteristice sînt egale, nu rezultă neapărat că repartiția variabilelor aleatoare corespunzătoare este aceeași.

40. *Fie ξ o variabilă aleatoare pentru care $\mathrm{d}(\xi)$ există. Fie $M(\xi) = 0$ și $\varphi(t)$ funcția caracteristică corespunzătoare.*

Să se arate că

$$\mathrm{d}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - R(\varphi(t))}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

unde $R(\varphi(t))$ este partea reală a lui $\varphi(t)$.

SOLUȚIE: $\mathrm{d}(\xi)$ se definește astfel:

$$\mathrm{d}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - M(\xi)|\,\mathrm{d}F(x).$$

Avem că

$$1 - R(\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos tx)\,\mathrm{d}F(x),$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1 - R(\varphi(t))}{t^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\,\mathrm{d}F(x)$$

sau

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - R(\varphi(t))}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}F(x).$$

Dar s-a arătat că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\,\mathrm{d}t = |x|$$

și deci

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - R(\varphi(t))}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\mathrm{d}F(x) = \mathrm{d}(\xi).$$

În aceleași condiții să arătăm că dacă $\mathrm{d}(\xi)$ există, atunci

$$\mathrm{d}(\xi) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{R(\varphi'(t))}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\varphi'(t))}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Știm că

$$\mathrm{d}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - R(\varphi(t))}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integrăm prin părți

$$\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \mathrm{d}u; \quad u = -\frac{1}{t},$$

$$1 - R(\varphi(t)) = v; \quad \mathrm{d}v = -R(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t$$

și obținem

$$d(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{1-R(\varphi(t))}{t}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(\varphi'(t))}{t}\,dt = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{R(\varphi'(t))}{t}\,dt.$$

41. *Fie X o variabilă aleatoare și să presupunem că valoarea medie $M(X)$ există și este egală cu zero, iar dispersia $D^2(X)=M(X^2)$ este finită. Să se arate că funcția caracteristică $\varphi(t)$ se poate scrie pentru orice u sub forma*

a) $$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 M(X^2) - t^2\int_0^1 (1-u)\,M[X^2(e^{iutX}-1)]\,du;$$

b) *pentru orice u astfel încît*

$$3t^2 M(X^2) < 1,$$

$\lg\varphi(t)$ *există și*

$$\lg\varphi(t) = -\frac{1}{2}t^2 M(X^2) - t^2\int_0^1 (1-u)\,M[X^2(e^{iutX}-1)]\,du + 3t^4 M^2(X^2).$$

SOLUȚIE. a) Se știe că

$$e^{itx} = 1 + itx - \frac{1}{2}t^2x^2 - t^2x^2\int_0^1 (1-u)(e^{iutX}-1)\,du.$$

Integrînd și ținînd seama că $M(X)=0$, rezultă

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 M(X^2) - t^2\int_0^1 (1-u)\,M[X^2(e^{iutX}-1)]\,du.$$

b) Să punem

$$\lg\varphi(t) = \lg(1-r)$$

unde

$$r = \frac{1}{2}t^2 M(X^2) + t^2\int_0^1 (1-u)\,M[X^2(e^{iutX}-1)]\,du.$$

Cum

$$3t^2 M(X^2) < 1,$$

iar

$$|r| \leqslant \frac{3t^2 M(X^2)}{2}$$

rezultă că

$$|r| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Atunci pentru orice număr complex r al cărui modul $|r| \leqslant \frac{1}{2}$, avem

$$\lg(1-r) = -r\int_0^1 \frac{1}{1-rt}\,dt,$$

$$\lg(1-r)+r = -r^2\int_0^1 \frac{t}{1-rt}\,dt,$$

$$|\lg(1-r)-(-r)| \leqslant |r|^2 \leqslant \frac{9}{4}\,t^4 M^2(X^2),$$

unde

$$|1-rt| \geqslant 1-|rt| \geqslant \frac{1}{2},$$

de unde rezultă egalitatea respectivă.

42. *Fie* ξ *și* η *două variabile aleatoare independente. Fie* $\varphi(t)$ *funcția caracteristică a variabilei aleatoare* η *și* $\Phi(t)$ *a variabilei* $\beta = \frac{\eta}{\xi}$ *iar* $f(x)$ *și* $g(y)$ *densitățile de repartiție corespunzătoare variabilelor aleatoare* ξ *respectiv* η.

Să se arate că

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) f(x)\,dx.$$

SOLUȚIE. Dacă notăm cu $h(z)$ densitatea de repartiție a variabilei aleatoare β, avem

$$h(z) = \int |x| f(x)\, g(zx)\,dx.$$

Atunci

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z)\, e^{itz}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\,|x| f(x)\, g(zx)\,dx\,dz.$$

Să facem schimbarea de variabile

$$zx = u,$$
$$x = x,$$

obținem

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{u}{x}} f(x) g(u)\,du\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{it}{x}u}\, g(u)\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) f(x)\,dx.$$

43. *Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca funcția caracteristică* $\Phi(t)$, *definită în exercițiul precedent, să fie dezvoltabilă în serie în jurul originii este ca toate momentele întregi nenegative ale variabilei* ξ *și toate momentele întregi și pozitive ale variabilei* η *să existe.*

SOLUȚIE. Să punem

$$m_{ij} = \iint x^i y^j f(x) g(y)\, dy.$$

Atunci

$$m_{0k} = \int x^k f(x)\, dx; \quad m_{k0} = \int y^k g(y)\, dy$$

$$\varphi\left(\frac{t}{x}\right) = \int e^{i\frac{t}{x}y} g(y)\, dy = \sum_k \frac{(it)^k}{k!} \cdot \frac{m_{0k}}{x^k}$$

și

$$\Phi(t) = \sum_k m_{0k} \frac{(it)^k}{k!} \int \frac{f(x)}{x^k}\, dx = \sum_k \frac{(it)^k}{k!} m_{0k} m_{-k0} = \sum_k \frac{(it)^k}{k!} M_k.$$

44. *Să se arate că dacă* ξ *este o variabilă aleatoare discretă, care ia valorile* $dk + r$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *iar* d *și* r *sînt numere reale date, atunci funcția sa caracteristică* $\varphi_\xi(t)$, *verifică relația*

$$\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi n}{d}\right)\right| = 1$$

pentru $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

SOLUȚIE. Variabila aleatoare ξ ia valorile $dk + r$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Să notăm

$$P(\xi = dk + r) = p_k,$$

unde $p_k \geqslant 0$. Atunci

$$\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi n}{d}\right)\right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k = 1$$

dacă n este număr întreg.

Reciproc, dacă pentru $t_0 \neq 0$ avem

$$|\varphi_\xi(t_0)| = 1$$

atunci

$$\varphi_\xi(t_0) = e^{i\alpha} = e^{it_0 r},$$

unde

$$r = \frac{\alpha}{t_0}.$$

Deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt_0}\,\mathrm{d}F(x) = e^{it_0 r}$$

sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_0(x-r)}\,\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}F(x)$$

de unde rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos t_0(x-r))\,\mathrm{d}F(x) = 0.$$

Cum $1 - \cos t_0(x-r)$ este pozitiv, cu excepția cazului în care $t_0(x - r) = 2k\pi$ unde k este un număr întreg, de aici rezultă că $x = \frac{2\pi}{t_0} + r$. Deci ξ ia valori de forma $\mathrm{d}k + r$, unde $\mathrm{d} = \frac{2\pi}{t_0}$.

45. *Fie ξ o variabilă aleatoare având densitatea de repartiție $f(t)$ și funcția caracteristică $\varphi(t)$. Să se arate că dacă densitatea de repartiție este mărginită*

$$f(x) \leqslant K$$

și funcția caracteristică

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

este nenegativă, atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

există.

SOLUȚIE. Ținînd seama de (1), dacă $u > 0$, avem

$$\int_{-u}^{u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ux}{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

și dacă $T > 0$, atunci

$$\int_0^T \left(\int_{-u}^{u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos Tx}{x^2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cum $\varphi(t) \geqslant 0$,

$$\int_0^T \left(\int_{-u}^{u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u = \int_{-T}^{T} \varphi(t)(T - |t|)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{T}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rezultă că

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t)\,dt \leqslant \frac{4}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2} f(x)\,dx.$$

Însă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos Tx}{x^2}\,dx = \pi T, \qquad \text{dacă } T > 0, \tag{2}$$

egalitate pe care o vom stabili în cele ce urmează, și cum $0 \leqslant f(x) \leqslant K$ obținem

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi(t)\,dt \leqslant 4\pi K,$$

de unde rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

există.

Ne rămîne să arătăm că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt = |x|.$$

Avem

$$\int_{-A}^{A} \frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt = 2\int_{0}^{A} \frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt.$$

Punînd $xt = v$, obținem

$$2\int_0^{Ax} \frac{x(1-\cos v)}{v^2}\,dv = 2x\int_0^{Ax} \frac{1-\cos v}{v^2}\,dv.$$

Integrînd prin părți, notînd $1-\cos v = w$, $\frac{1}{v^2}\,dv = dz$, obținem

$$2x\int_0^{Ax} \frac{1-\cos v}{v^3}\,dv = 2x\left[-\frac{1-\cos v}{v}\right]_0^{Ax} + 2x\int_0^{Ax} \frac{\sin v}{v}\,dv.$$

Cum însă

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v} = \frac{\pi}{2}$$

rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt = 2|x| \cdot \frac{\pi}{2} = \pi|x|.$$

46. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare repartizată normal* $N(0, 1)$. *Se cere:*

a) *Să se determine funcția caracteristică a variabilei aleatoare* $\frac{\xi^2}{2}$.

b) *Dacă* ξ_1 *și* ξ_2 *sînt două variabile aleatoare independente repartizate normal* $N(0, 1)$, *să se determine funcția caracteristică a variabilei aleatoare:*

$$\eta = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{2}.$$

c) *Să se arate că* η *poate fi considerată ca un produs de două variabile aleatoare independente ce urmează de asemenea legii normale* $N(0, 1)$.

SOLUȚIE. a) Prin definiție

$$\varphi_{\frac{\xi^2}{2}}(t) = M\left(e^{it\frac{\xi^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1-it)}\,dx,$$

de unde

$$\varphi_{\frac{\xi^2}{2}}(t) = (1 - it)^{-1/2}.$$

b) Avem

$$\varphi_{\frac{\xi^2}{2}} = (1 - it)^{-1/2}; \quad \varphi_{-\frac{\xi^2}{2}} = \overline{\varphi}_{\frac{\xi^2}{2}} = (1 + it)^{-1/2}.$$

Deoarece variabilele ξ_1 și ξ_2 sînt independente, urmează că

$$\varphi_\eta(t) = (1 - it)^{-1/2} \cdot (1 + it)^{-1/2}$$

sau

$$\varphi_\eta(t) = (1 + t^2)^{-1/2}.$$

c) Putem scrie

$$\eta = \frac{(\xi_1 + \xi_2)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\xi_1 - \xi_2)}{\sqrt{2}}.$$

Din proprietățile legii normale se știe că $\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}$ și $\frac{\xi_1-\xi_2}{\sqrt{2}}$ urmează legi normale $N(0, 1)$.

Pentru a arăta că aceste variabile sînt independente, este suficient (deoarece sînt repartizate normal) să arătăm că coeficientul de corelație este nul, ceea ce este evident.

Vectorul aleator (ξ_1, ξ_2) are probabilitatea elementară

$$f(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\,dx_1dx_2. \tag{1}$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} = u; \quad \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} = v.$$

Jacobianul transformării

$$\left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)}\right| = +1$$

și probabilitatea elementară (1), devine

$$f(u, v)\,du\,dv = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}}\,du\,dv.$$

Probabilitatea elementară a vectorului (u, v) este egală cu produsul legilor marginale, ceea ce dovedește că u și v sînt independente

47. *Fie* ξ, η, ζ *variabile aleatoare independente repartizate normal* $N(0, 1)$ *și*

$$\theta_1 = \xi\eta,$$
$$\theta_2 = \xi\zeta.$$

Se cere: a) *Să se calculeze funcția caracteristică a vectorului aleator* (θ_1, θ_2). *Să se arate că variabilele* θ_1 *și* θ_2 *sînt dependente cu toate că coeficientul lor de corelație este nul.*

b) *Să se arate că expresiile*

$$\frac{1}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^{n/2}}, \tag{1}$$

unde n *este un număr întreg, sînt funcții caracteristice.*

c) *Să se aplice formulele de inversiune a lui Fourier pentru cele 2 variabile aleatoare.*

— *Pentru ce valori ale lui* n, *expresiile de forma*

$$\frac{k}{(1 + x^2 + y^2)^{n/2}}$$

pot fi densități de probabilitate?

— *Ce lege de probabilitate corespunde funcției caracteristice* (1). *Să se studieze cazul particular* $n = 3$.

SOLUȚIE. a) Fie $\varphi(t_1, t_2)$ funcția caracteristică a vectorului aleator (θ_1, θ_2) Avem

$$\varphi(t_1, t_2) = M\left(e^{i(t_1\xi\eta + t_2\xi\zeta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1xy + t_2xz)} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\,dx\,dy\,dz.$$

Se știe că

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1xy} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = e^{-\frac{t_1^2x^2}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_2xz} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = e^{-\frac{t_2^2x^2}{2}}.$$

Deci

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+t_1^2+t_2^2)}\, dx,$$

de unde

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 + t_1^2 + t_2^2)^{1/2}},$$

$\varphi(t_1, t_2)$ are în origine derivate de orice ordin și deci

$$\varphi(t_1, t_2) = 1 - \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)(t_1^2 + t_2^2)^2 + \theta(|t_1| + |t_2|)^4.$$

Se constată că în această dezvoltare lipsesc termenii în $t_1 t_2$ ceea ce dovedește că coeficientul de corelație al variabilelor θ_1 și θ_2 este nul.

Variabilele θ_1 și θ_2 nu sînt independente, deoarece în caz contrar ar trebui să avem

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 + t_1^2 + t_2^2)^{1/2}} = \varphi_{\theta_1}(t)\, \varphi_{\theta_2}(t) = \frac{1}{(1 + u_1^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1 + u_2^2)^{1/2}},$$

ceea ce este imposibil.

b) Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}, \xi_2', \xi_4', \ldots, \xi_{2n}'$, 3n variabile aleatoare independente repartizate normal $N(0, 1)$. Căutăm funcția caracteristică a vectorului aleator (η_1, η_2), unde

$$\eta_1 = \xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4 + \ldots + \xi_{2n-1}\xi_{2n},$$
$$\eta_2 = \xi_1\xi_2' + \xi_3\xi_4' + \ldots + \xi_{2n-1}\xi_{2n}'.$$

Avem

$$\Phi(t_1, t_2) = M(e^{i(t_1\eta_1 + t_2\eta_2)}) = M[e^{i(t_1(\xi_1\xi_2 + \ldots + \xi_{2n-1}\xi_{2n}) + t_2(\xi_1\xi_2' + \ldots + \xi_{2n-1}\xi_{2n}'))}].$$

Deoarece valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare independente este egală cu produsul valorilor medii, avem

$$\Phi(t_1, t_2) = M[e^{i(t_1\xi_1\xi_2 + t_2\xi_1\xi_2')}]M[e^{i(t_1\xi_3\xi_4 + t_2\xi_3\xi_4')}]\ldots$$
$$\ldots M[e^{i(t_1\xi_{2n-1}\xi_{2n} + t_2\xi_{2n-1}\xi_{2n}')}],$$

unde fiecare dintre aceste valori medii este egală cu funcția caracteristică a vectorului (θ_1, θ_2).

Deci

$$\Phi(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 + t_1^2 + t_2^2)^{n/2}}.$$

Aceste expresii sînt prin urmare funcții caracteristice.

c) Formulele de inversiune pentru două variabile sînt

$$F^*(x, y) - F^*(0, 0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it_1 x} - 1}{-it_1} \cdot \frac{e^{-it_2 y} - 1}{-it_2} \varphi(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2$$

și dacă $\varphi(t_1, t_2)$ este integrabilă

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1x+t_2y)}\,\varphi(t_1, t_2)\,dt_1dt_2.$$

Cantitățile $(1 + x^2 + y^2)^{-n/2}$ sînt definite și pozitive în tot planul: pentru ca $\frac{k}{(1+x^2+y^2)^{n/2}}$ să fie o densitate de probabilitate este necesar și suficient deci ca

$$k\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{n/2}}$$

să existe.

Trecînd la coordonate polare

$$2\pi k\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^{n/2}} < \infty.$$

Cînd $\rho \to \infty$ integrantul este echivalent cu $\rho^{-(n-1)}$. Este necesar și suficient deci ca $n - 1 > 1$.

Deoarece n este presupus întreg, avem $n \geqslant 3$.

Valoarea constantei k rezultă din condiția

$$2\pi k\int_0^{\infty}\frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^{n/2}} = 1,$$

ceea ce este același lucru cu

$$k\pi\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u)^{n/2}} = 1,$$

de unde

$$k = \frac{n-2}{2\pi}.$$

În particular pentru $n = 3$, obținem $k = \frac{1}{2\pi}$.

Prin urmare $\frac{1}{(1+t_1^2+t_2^2)^{n/2}}$ este integrabilă.

Pentru a calcula

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(t_1x+t_2y)}}{(1+t_1^2+t_2^2)^{3/2}}\,dt_1dt_2$$

punem $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ și facem schimbarea de variabile $t_1 = v_1\cos\varphi - v_2\sin\varphi$, $t_2 = v_1\sin\varphi + v_2\cos\varphi$.

Jacobianul acestei transformări este egal cu 1. Astfel integrala ce trebuia calculată devine

$$I = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-irv_1}}{(1+v_1^2+v_2^2)^{3/2}}\,dv_1dv_2.$$

Calculăm mai întîi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_2}{(1+v_1^2+v_2^2)^{3/2}}.$$

Această expresie se mai poate scrie

$$\frac{1}{1+v_1^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dv_2}{\sqrt{1+v_1^2}}}{\left(1+\frac{v_2^2}{1+v_1^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{1+v_1^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}}$$

și punînd $\alpha = \operatorname{tg} t$, devine

$$\frac{1}{1+v_1^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{tg} t)}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{1+v_1^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t|\, dt = \frac{2}{1+v_1^2}.$$

Urmează că

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itv_1}}{1+v_1^2}\, dv_1 = \frac{1}{2\pi} e^{-|t|}$$

și

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se verifică ușor că $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$.

48. *Fie ξ și η două variabile aleatoare independente care urmează o aceeași repartiție. Să presupunem că dispersiile sînt finite. Să se arate că dacă $\xi+\eta$ și $\xi-\eta$ sînt variabile aleatoare independente, atunci ξ și η sînt normal distribuite.*

SOLUȚIE. Fără a restrînge generalitatea să presupunem că

$$M(\xi) = M(\eta) = 0.$$

$$D(\xi) = D(\eta) = 1.$$

Cum ξ și η sînt independente, dacă notăm cu $\varphi(t)$ funcția caracteristică, atunci $\xi+\eta$ are funcția caracteristică

$$\varphi^2(t)$$

iar $\xi-\eta$

$$\varphi(t)\,\varphi(-t).$$

Dacă $\xi+\eta$ și $\xi-\eta$ sînt independente, funcția caracteristică a variabilei

$$(\xi+\eta)+(\xi-\eta) = 2\xi$$

se scrie imediat. Avem relația

$$\varphi(2t) = \varphi^2(t)\varphi(t)\varphi(-t)$$

sau

$$\varphi(2t) = \varphi^3(t)\varphi(-t) = \varphi^3(t)\overline{\varphi(t)}. \tag{1}$$

Se vede ușor că $\varphi(t) \neq 0$. Într-adevăr dacă $\varphi(t) = 0$, pentru o valoare oarecare a lui t, atunci dacă în loc de t punem $\frac{t}{2}$ avem $\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = 0$, deci $\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Cum $\varphi(t)$ este o funcție continuă, obținem că $\varphi(0) = 0$, ceea ce ne conduce la o contradicție, deoarece $\varphi(0) = 1$.

Să introducem acum următoarea notație

$$\psi(t) = \lg \varphi(t).$$

Atunci din (1) rezultă că

$$\psi(2t) = 3\psi(t) + \psi(-t) \tag{2}$$

În relația de mai înainte, să punem $-t$ în loc de t. Avem

$$\psi(-2t) = 3\psi(-t) + \psi(t). \tag{3}$$

Din relațiile (2) și (3), notînd

$$\psi(t) - \psi(-t) = \delta(t)$$

obținem

$$\delta(2t) = 2\delta(t). \tag{4}$$

Am presupus însă

$$M(\xi) = 0, \; D(\xi) = 1$$

și deci $\varphi(t)$ este diferențiabilă de două ori în punctul $t = 0$,

$$\varphi'(0) = 0, \; \varphi''(0) = -1$$

deoarece

$$\frac{\varphi'(0)}{i} = M(\xi); \; \frac{\varphi''(0)}{i^2} = D(\xi).$$

Rezultă că și funcția $\psi(t)$ și deci $\delta(t)$ este diferențiabilă în $t = 0$. Avem

$$\psi'(0) = 0, \; \psi''(0) = -1$$

deci

$$\delta'(0) = 0$$

și în plus

$$\delta(0) = 0.$$

În (4) dacă punem $\frac{t}{2}$ în loc de t, avem

$$\delta(t) = 2\delta\left(\frac{t}{2}\right)$$

și în general

$$\delta(t) = 2^n \delta\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

și deci

$$\frac{\delta(t)}{t} = \frac{\delta\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dacă $n \to \infty$, obținem

$$\frac{\delta(t)}{t} \equiv 0$$

deci

$$\delta(t) \equiv 0$$

De aici rezultă că

$$\psi(t) = \psi(-t).$$

Cu alte cuvinte funcția $\psi(t)$ este o funcție pară.

Dar atunci ținînd seama de (1), obținem

$$\psi(2t) = 4\psi(t)$$

sau

$$\psi(t) = 4\psi\left(\frac{t}{2}\right).$$

Rezultă că

$$\psi(t) = 4^n \psi\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

și de aici

$$\frac{\psi(t)}{t^2} = \frac{\psi\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\left(\frac{t}{2^n}\right)^2}, \quad n = 0, \ldots$$

Ținînd seama că dezvoltînd în serie

$$\psi(h) = \psi(0) + h\psi'(0) + \frac{h^2}{2}\psi''(0) + 0(h^2).$$

se vede că

$$\psi(h) = \frac{h^2\psi''(0)}{2} + 0(h^2), \text{ unde } \lim_{h \to 0} \frac{0(h^2)}{h^2} = 0.$$

Deci, dacă $n \to \infty$ obținem

$$\frac{\psi(t)}{t^2} = \frac{\psi''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

de unde rezultă că

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

și deci ξ și η sînt normal distribuite.

49. *Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variabile aleatoare independente, pozitive urmînd aceeași repartiție definită de densitatea $\lambda e^{-\lambda}$.*

Se cere să se determine repartiția variabilei $\eta = \sum_1^n \xi_k$.

SOLUȚIE. Vom calcula mai întîi funcția caracteristică corespunzătoare variabilei ξ_k. Prin definiție

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{itx}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)}\, dx,$$

de unde

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Deoarece variabilele ξ_k sînt independente, avem

$$\varphi_\eta(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

Se observă că $|\varphi_\eta(t)|$ este integrabilă pentru $n \geqslant 2$.
Formula de inversiune a lui Fourier ne dă

$$f_\eta(x) = \frac{\lambda^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^n}\, dt.$$

Această integrală se calculează cu ajutorul reziduurilor folosind funcția $g(z) = \frac{e^{-ixz}}{(\lambda - iz)^n}$ și conturul alăturat în cazul $x > 0$ (fig. 30).

În acest caz e^{-ixz} este mărginită și

$$\int_{-R}^{R} g(z)dz + \int_{\Gamma_R} g(z)dz = 2\pi i \operatorname{rez}(g, -i\lambda)$$

Cînd $R \to \infty$, $\int_{\Gamma_R} g(z)\, dz \to 0$ deoarece $zg(z) \to 0$, cînd $|z| \to \infty$.

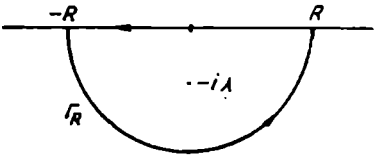


Fig. 30.

Deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^n}\, dt = -2i\pi \operatorname{rez}(g, -i\lambda).$$

Pentru a calcula reziduul funcției g în $-i\lambda$ punem $z = -i\lambda + \alpha$, $g(z)$ devine

$$\frac{e^{-ix(-i\lambda+\alpha)}}{(-i\alpha)^n} = \frac{e^{-\lambda x}}{(-i\alpha)^n}\left[1 - ix\alpha + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}(i\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right]$$

În această dezvoltare, termenul lui $\frac{1}{\alpha}$ este

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{x^{n-1}e^{-\lambda x}}{-i(n-1)!}$$

de unde

$$\frac{\lambda^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^n}\,dt = -\frac{\lambda^n}{2\pi}2i\pi\cdot\frac{x^{n-1}e^{-\lambda x}}{-i(n-1)!} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda x}x^{n-1}.$$

Pentru $x < 0$, se folosește conturul simetric în raport cu axa reală. Funcția considerată fiind olomorfă în domeniul considerat, integrala este nulă.

Deci, densitatea de repartiție a variabilei aleatoare η are expresia

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0, \\ \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!}x^{n-1} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

50. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variabile aleatoare independente, având densitatea de repartiție*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } |x - a_k| \leqslant \dfrac{1}{2}, & k = 1, 2, \ldots, n \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei

$$y = X_1X_2\ldots X_n.$$

SOLUȚIE. Fie X_k pozitiv și de aceea $a_k > \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Putem scrie

$$u = \ln y = \ln X_1 + \ln X_2 + \ldots + \ln X_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \qquad (1)$$

unde

$$u_k = \ln X_k.$$

Distribuția compusă a lui $u_1, u_2, \ldots, u_n$, este

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{k=1}^{n} g_k(u_k), \qquad (2)$$

unde

$$g_k(u_k) = f_k(e^{u_k})\, e^{u_k},$$

deoarece $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt de asemenea independente și

$$g_k(u_k) = f_k(x_k(u_k))\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}u_k}.$$

Funcția caracteristică corespunzătoare densității $g_k(u)$ este

$$\varphi_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} g_k(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\cdot f_k(e^u)\, e^u\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{|e^u - a_k| \leqslant \frac{1}{2}} e^{itu}\, e^u\,\mathrm{d}u = \int_{b_k}^{c_k} e^{u(1+it)}\,\mathrm{d}u,$$

unde

$$b_k = \ln\left(a_k - \frac{1}{2}\right) \text{ și } c_k = \ln\left(a_k + \frac{1}{2}\right).$$

Astfel

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{1+it}\left\{\left(a_k + \frac{1}{2}\right)^{1+it} - \left(a_k - \frac{1}{2}\right)^{1+it}\right\}. \tag{3}$$

Notînd cu $\varphi(t)$ funcția caracteristică corespunzătoare densității de repartiție $g(u)$ avem

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(a_k + \frac{1}{2}\right)^{1+it} - \left(a_k - \frac{1}{2}\right)^{1+it}}{1+it}. \tag{4}$$

Din (4) rezultă $g(u)$, prin formula de inversiune.

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

și cum $u = \ln y$, densitatea de repartiție a variabilei y este

$$f(y) = g(u(y))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = g(\ln y)\frac{1}{y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y^{-(1+it)}\cdot\varphi(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} y^{-z} \prod_{k=1}^{n} \frac{A_k^z - B_k^z}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} h(z)\,\mathrm{d}z, \tag{5}$$

unde $A_k = a_k + \frac{1}{2}$, $B_k = a_k - \frac{1}{2}$ și drumul de integrare este linia dreaptă prin punctul $z = 1$ paralelă la axa imaginară în planul complex z.

Se observă că integrantul $h(z)$ este o funcție regulată de z în întreg planul z, astfel că pentru orice $\omega > 0$, avem

$$\int_{1-i\omega}^{1+i\omega} h(z)\mathrm{d}z + \int_{1+i\omega}^{i\omega} h(z)\mathrm{d}z + \int_{i\omega}^{-i\omega} h(z)\mathrm{d}z + \int_{-i\omega}^{1-i\omega} h(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{6}$$

Din (6), rezultă

$$\left|\int_{1+i\omega}^{i\omega} h(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{1}{\omega^n} \operatorname*{Max}_{0\leqslant x\leqslant 1} y^{-x} \prod_{k=1}^{n} (A_k^x + B_k^x) \leqslant C\omega^{-n},\ n \geqslant 1$$

și $C\omega^{-n} \to 0$ cînd $n \to \infty$. Analog, se obține

$$\left|\int_{-i\omega}^{1-i\omega} h(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant C\omega^{-n},$$

ce tinde la zero cînd $n \to \infty$.

Din (5) și (6) avem

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{y^{-z}}{z^n} \prod_{k=1}^{n} (A_k^z - B_k^z)\,\mathrm{d}z \tag{7}$$

unde drumul de integrare este axa imaginară.

Notînd prin $R(\omega)$ drumul $z = \omega e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, avem din (7)

$$f(y) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{R(\omega)} y^{-z} \prod_{k=1}^{n} (A_k^z - B_k^z)\,\frac{\mathrm{d}z}{z^n}. \tag{8}$$

Vom exprima produsul de sub integrală ca o sumă de termeni, din care fiecare este un produs de puteri simple cu exponentul z.

Folosind notația $P(A) = \prod_{k=1}^{n} A_k$, obținem

$$\prod_{k=1}^{n} (A_k^z - B_k^z) = (P(A))^z - \sum_{k=1}^{n} \left(B_k \cdot \frac{P(A)}{A_k}\right)^z +$$

$$+ \sum_{k_1,k_2=1;\, k_1<k_2}^{n} \left(B_{k_1}\cdot B_{k_2}\frac{P(A)}{A_{k_1}\cdot A_{k_2}}\right)^z + \ldots + (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} B_k\right)^z. \tag{9}$$

Din aceasta se observă că integrantul în (8) poate fi scris ca o sumă de 2^n termeni de forma specială

$$\pm\exp\left(-z(\ln y - \ln C_r(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n)\right) =$$

$$= \pm \exp\left(-z\cdot C_r(y, A, B)\right),$$

unde C_r în termeni exponențiali sînt reali și definiți de

$$y^{-z}\prod_{k=1}^{n}(A_k^z - B_k^z) = \sum_{r=1}^{2^n} \varepsilon_r e^{-zC_r}, \tag{10}$$

ca funcții de parametrii $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n, y$; și unde $\varepsilon_r = \pm 1$ după cum numărul de factori B_k ce apar în C_r este par sau impar.

Pentru $C_r \geqslant 0$, avem

$$\left|\int_{R(\omega)} e^{-zC_r}\frac{dz}{z^n}\right| \leqslant \pi\omega\omega^{-n} \to 0 \qquad (n \geqslant 2) \tag{11}$$

cînd $\omega \to \infty$.

Astfel din (8) și (10) rezultă că

$$f(y) = \sum_{r=1}^{2^n} \varepsilon_r \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{R(\omega)} e^{-zC_r}\frac{dz}{z^n}, \tag{12}$$

$$C_r(y, A, B) < 0.$$

Notînd prin $L(\omega)$ jumătatea cercului $z = \omega e^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$, astfel $R(\omega) + L(\omega)$ este întreg cercul $K(\omega)$, dat de $|z| = \omega$, pentru $C_r < 0$, analog ca în (12), obținem

$$\left|\int_{L(\omega)} e^{-zC_r}\frac{dz}{z^n}\right| \to 0, \text{ cînd } \omega \to \infty \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

De aceea pentru $C_r < 0$,

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{R(\omega)} e^{-zC_r}\frac{dz}{z^n} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K(\omega)} e^{-zC_r}\frac{dz}{z^n} - \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L(\omega)} e^{-zC_r}\frac{dz}{z^n} = \frac{(-C_r)^{n+1}}{(n-1)!}. \tag{13}$$

În final din (13) pentru $n \geqslant 2$

$$f(y) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\substack{r=1 \\ C_r(y)<0}}^{2^n} \varepsilon_r(-C_r(y))^{n-1}, \tag{14}$$

unde $C_r(y)$ și ε_r pot fi găsite din (9) și (10).

Obținînd $f(y)$ formal din (13), găsim de asemenea pentru $n = 1$, $f(y) = f(x_1) = f_1(x)$ definit în (1), așa că acum (13) este adevărată pentru toți $n \geqslant 1$ și ne dă densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $y = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

51. *În condițiile problemei precedente să se determine densitatea de probabilitate a variabilei y în cazul în care* $n = 3$.

SOLUȚIE. Din (9) și (10) determinăm ε_r și C_r după cum urmează :

$$C_1 = \ln y - \ln A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 ; \quad \varepsilon_1 = 1$$
$$C_2 = \ln y - \ln A_2 \cdot A_3 \cdot B_1 ; \quad \varepsilon_2 = -1$$
$$C_3 = \ln y - \ln A_1 \cdot A_3 \cdot B_2 ; \quad \varepsilon_3 = 1$$
$$C_4 = \ln y - \ln A_1 \cdot A_2 \cdot B_3 ; \quad \varepsilon_4 = -1$$
$$C_5 = \ln y - \ln A_3 \cdot B_1 \cdot B_2 ; \quad \varepsilon_5 = 1$$
$$C_6 = \hat{\imath}\ln y - \ln A_2 \cdot B_1 \cdot B_3 ; \quad \varepsilon_6 = -1$$
$$C_7 = \ln y - \ln A_1 \cdot B_2 \cdot B_3 ; \quad \varepsilon_7 = 1$$
$$C_8 = \ln y - \ln B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 ; \quad \varepsilon_8 = -1.$$

Presupunînd relația de ordine

$$\frac{1}{2} < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3,$$

obținem de asemenea o ordine pentru diferitele produse ale lui A_k și B_k prin următorul raționament. Avem

$$A_k = a_k + \frac{1}{2}; \quad B_k = a_k - \frac{1}{2} > 0.$$

Acum funcția

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}}$$

are derivata

$$f'(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2},$$

care este pozitivă pentru toți x, prin urmare $f(x)$ este monoton crescătoare și urmează că :

$$\frac{B_1}{A_1} \leqslant \frac{B_2}{A_2} \leqslant \frac{B_3}{A_3}.$$

Astfel

$$B_1B_2B_3 < B_1B_2A_3 \leqslant B_1A_2B_3 < B_1A_2A_3 ;$$
$$A_1B_2B_3 < A_1B_2A_3 \leqslant A_1A_2B_3 < A_1A_2A_3.$$

Avem

$$B_1 \cdot A_2 \cdot B_3 \leqslant A_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$
$$B_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \leqslant A_1 \cdot B_2 \cdot A_3 \quad \text{dar nu necesar.}$$
$$B_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = A_1 \cdot B_2 \cdot B_3$$

Astfel avem două ordini posibile ale acestor produse.

egem una dintre ele, presupunînd ultima relație de ordine de ase-
ıdevărată. Din (13) și (14) cu ajutorul ecuației funcționale a funcției
ıice, obținem

$$0 \qquad (y \leqslant B_1 \cdot B_2 \cdot B_3)$$

$$\frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{B_1B_2B_3} \qquad (B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \leqslant y \leqslant B_1 \cdot B_2 \cdot A_3)$$

$$\frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{B_1B_2B_3} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{B_1B_2A_3} \qquad (B_1 \cdot B_2 \cdot A_3 \leqslant y \leqslant B_1 \cdot A_2 \cdot B_3)$$

$$\ln\frac{A_2}{B_2}\cdot\ln\frac{A_3}{B_3} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{B_1A_2A_3} \qquad (B_1 \cdot A_2 \cdot B_3 \leqslant y \leqslant B_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$

$$\ln\frac{A_2}{B_2}\cdot\ln\frac{A_3}{B_3} \qquad (B_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \leqslant y \leqslant A_1 \cdot B_2 \cdot B_3)$$

$$\ln\frac{A_2}{B_2}\cdot\ln\frac{A_3}{B_3} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{A_1B_2B_3} \qquad (A_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \leqslant y \leqslant A_1 \cdot B_2 \cdot A_3)$$

$$\frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{A_1A_2A_3} - \frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{A_1A_2B_3} \qquad (A_1 \cdot B_2 \cdot A_3 \leqslant y \leqslant A_1 \cdot A_2 \cdot B_3)$$

$$\frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{A_1A_2A_3} \qquad (A_1 \cdot A_2 \cdot B_3 \leqslant y \leqslant A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$

$$0 \qquad (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \leqslant y)$$

• *Fie* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, *n variabile aleatoare independente, avînd densi-*
repartiție $f_k(x)$.
se arate că densitatea de repartiție a variabilei

$$\beta = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n,$$

sînt constante reale este

$$f(y) = e^{-c^2(y-m)^2}\sum_{r=0}^{\infty} A_r . H_r\,[c(y-m)],$$

(x) *sînt polinoamele lui Hermite iar c, m și* A_r *sînt numere reale.*
LUȚIE. a) Să reamintin cîteva proprietăți ale polinoamelor lui Her-
im că (definiția polinoamelor lui Hermite)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^n(e^{-x^2})}{\mathrm{d}x^n} \tag{1}$$

$$e^{2mx-m^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{n!}\cdot H_n(x) \tag{2}$$

sau încă

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}.$$

Se poate demonstra relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_n(x+ct)\,dx = \sqrt{a\pi}\,(1-a)^{\frac{n}{2}} \cdot H_n\left(\frac{ct}{\sqrt{1-a}}\right), \tag{3}$$

unde a și c sînt două numere reale sau complexe. Ținînd seama de relația (2), avem

$$e^{2m(x+ct)-m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \cdot H_n(x+ct),$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_n(x+ct)\,dx = e^{2mct-m^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}+2mx}\,dx = \sqrt{a\pi}\, e^{2mct-(1-a)m^2} =$$

$$= \sqrt{a\pi}\, e^{2(m\sqrt{1-a})\frac{ct}{\sqrt{1-a}} - (m\sqrt{1-a})^2} = \sqrt{a\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m\sqrt{1-a})^n}{n!} H_n\left(\frac{ct}{\sqrt{1-a}}\right)$$

și identificînd în primul și în ultimul membru coeficienții lui m, se obține relația (3).

În particular dacă $a = 1$, deoarece

$$\lim_{a\to 1} (1-a)^{\frac{n}{2}} \cdot H_n\left(\frac{ct}{\sqrt{1-a}}\right) = (2ct)^n$$

rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x+ct)\,dx = \sqrt{\pi}\,(2ct)^n;$$

iar dacă $a = 2$ și $c = \sqrt{-1} = i$ se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x+it)\,dx = \sqrt{2\pi}\, i^n\, H_n(t).$$

Relația (3) poate fi generalizată

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x+c_1 t)\, H_n(x+c_2 u)\,dx =$$

$$= \sqrt{a\pi}\,(1-a)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \left(\frac{2a}{1-a}\right)^r \cdot r!\, C_m^r\, C_n^r\, H_{m-r}\left(\frac{C_1 t}{\sqrt{1-a}}\right) H_{n-r}\left(\frac{C_2 t}{\sqrt{1-a}}\right)$$

unde C_1 și C_2 sînt constante.

Fie acum $f(x)$ o densitate de repartiție, de pătrat, integrabilă și să presupunem că

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k H_k(x). \tag{4}$$

Atunci funcția caracteristică corespunzătoare se poate scrie sub forma

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} e^{itx} H_k(x)\,dx = e^{-\frac{at^2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_k\left(x + \frac{ait}{2}\right) dx$$

și ținînd seama de (3)

$$\varphi(t) = e^{-\frac{at^2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{a\pi}\,(1-a)^{\frac{k}{2}} H_k\left(\frac{at}{2\sqrt{a-1}}\right).$$

Se pot stabili următoarele relații mai generale

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(bx),$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{at^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{a\pi}\,(1-ab^2)^{\frac{n}{2}} \cdot H_n\left(\frac{abt}{2\sqrt{ab^2-1}}\right).$$

O altă generalizare este următoarea

$$f(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(bx + c),$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{at^2}{4} + itm} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{a\pi}\,(1-ab^2)^{\frac{n}{2}} \cdot H_n\left(\frac{c+bm}{\sqrt{1-ab^2}} + \frac{abi}{2\sqrt{1-ab^2}}t\right).$$

Dacă $a = 1$, se obțin din relația (3), egalitățile

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r H_r(x), \\ \varphi(t) &= e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r (it)^r, \end{aligned} \tag{5}$$

b) Să stabilim acum densitatea de repartiție a variabilei β. Se poate demonstra că $f(y)$ este o funcțiune continuă și că funcția

$$g(y) = f(y) \cdot e^{c^2(y-m)^2},$$

cu m și c convenabil aleși, are o derivată cu variația mărginită și deci $f(y)$ se poate scrie

$$f(y) = e^{-c^2(y-m)^2} \sum_{r=0}^{\infty} A_r H_r[c(y-m)].$$

Aplicînd formulele de inversiune (5), avem

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{4c^2}+itm}\frac{\sqrt{\pi}}{c}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A_r}{c^r}(it)^r.$$

Pe de altă parte, variabilele aleatoare ξ_i fiind independente rezultă că

$$\varphi(t) = \varphi_1(a_1 t)\,\varphi_2(a_2 t)\ldots\varphi_n(a_n t) = \prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{m_k^r}{r!}(a_k it)^r\right],$$

unde φ_i sînt funcțiile caracteristice corespunzătoare variabilelor ξ_i, iar m_k^r momentul de ordinul r corespunzător densității de repartiție $f_k(x)$, adică

$$m_k^r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_k(x)\,dx, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Identificînd cele două expresii obținute pentru $\varphi(t)$, se pot determina coeficienții A_k și deci funcția $f(y)$. Dacă M_k este momentul de ordinul r al variabilei β, se găsește că

$$M_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k m_k^1, \quad M_2 - M_1^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 m_k^2$$

și

$$A_0 = \frac{c}{\sqrt{\pi}}, \quad A_1\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{c^2} + m = M_1,$$

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{c^3}A_2 - \frac{\pi}{c^4}\cdot A_1^2 + \frac{1}{2c^2} = M_2 - M_1^2,$$

și așa mai departe.

Pentru a pune în evidență legea lui Gauss redusă, să alegem pe m și c astfel încît $A_1 = A_2 = 0$. Atunci

$$m = M_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k m_k^1,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2(M_2 - M_1^2)}} = \sqrt{\frac{1}{2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 m_k^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

și deci

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}\sum_{r=3}^{\infty}A_r H_r\left(\frac{y-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \tag{5}$$

și

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}+itm}\left(1+\sigma\sqrt{2\pi}\sum_{r=3}^{\infty}A_r\cdot(\sigma\sqrt{2})^r(it)^r\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{m_k^r}{r!}(a_k it)^r\right].$$

Dacă legile $f_k(x)$ sînt reduse, adică

$$m_k^1 = 0, \quad m_k^2 = 1,$$

atunci

$$m = M_1 = 0, \quad M_2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = b_n^2,$$

$$c = \frac{1}{b_n\sqrt{2}}, \quad A_1 = A_2 = 0$$

și deci

$$f(y) = \frac{1}{b_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2b_n^2}} + e^{-\frac{y^2}{2b_n^2}} \sum_{r=3}^{\infty} A_r H_r\left(\frac{y}{b_n\sqrt{2}}\right).$$

53. *Fie ξ o variabilă aleatoare, a cărei densitate de repartiție este dată de*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \sum_{r=0}^{\infty} A_r H_r\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

unde cocficienții A_r sînt supuși numai la condiții suficiente pentru convergență.

Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variabile aleatoare independente de ξ; valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pe care le pot lua aceste variabile satisfac m condiții lineare $(m < n)$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = u_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

unde u_k este valoarea luată de o variabilă aleatoare η_k iar a_{kj} sînt numere reale.

Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$$

și a celor m forme lineare precedente.

SOLUȚIE. Notînd cu $\varphi(t)$funcția caracteristică corespunzătoare densității $f(x)$, ținînd seama de (5) din exercițiul precedent, rezultă că

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cdot (it\sigma\sqrt{2})^r$$

și funcția caracteristică a variabilelor $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, β este dată de

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}) =$$

$$= \iint \ldots \int e^{i(u_1 t_1 + \ldots + u_m t_m) + i v t_{m+1}} f(x_1) \ldots f(x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Cum însă

$$\sum_{k=1}^{n} u_k t_k = \sum_{k=1}^{m} t_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k\right] x_j,$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j^2,$$

avem

$$i\sum_{k=1}^{m} u_k t_k + ivt_{m+1} = i\sum_{j=1}^{n}\left[x_j^2 t_{m+1} + \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k\right)x_j\right]$$

și

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}) = \prod_{j=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left[x_j^2 t_{m+1} + \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k\right)x_j\right]} f(x_j)\mathrm{d}x_j\right\}.$$

Atunci

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2} + it_{m+1}x_j^2 + i\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k\right)x_j} \sum_{r=0}^{\infty} A_r H_r\left(\frac{x_j}{\sigma\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x_j =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\sigma^2\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k\right)^2}{2(1-2i\sigma^2 t_{m+1})}} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2i\sigma^2 t_{m+1})\left[x_j - \frac{i\sigma\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k\right)}{\sqrt{2}\,(1-2i\sigma^2 t_{m+1})}\right]^2} H_r(x_j)\,\mathrm{d}x_j,$$

care în virtutea egalităților (3) din exemplul precedent sînt egale cu

$$\frac{1}{\sqrt{1-2i\sigma^2 t_{m+1}}} e^{-\frac{\sigma^2\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k\right)^2}{2(1-2i\sigma^2 t_{m+1})}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} A_r(-\sigma)^r \cdot \left(\frac{2t_{m+1}}{2\sigma^2 t_{m+1}+i}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot H_r\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_j}{2\sqrt{t_{m+1}(2\sigma^2 t_{m+1}+i)}}\right).$$

Notînd

$$Q = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k\right)^2 = \sum_{j,k} b_{jk}t_j t_k,$$

unde

$$b_{jk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}a_{kr}$$

avem

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}) = \frac{1}{(1-2i\sigma^2 t_{m+1})^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sigma^2 Q}{2(1-2i\sigma^2 t_{m+1})}} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} A_r \cdot (-\sigma)^r \left(\frac{2t_{m+1}}{2\sigma^2 t_{m+1}+i}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot H_r\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k}{2\sqrt{t_{m+1}(2\sigma^2 t_{m+1}+i)}}\right)\right\}.$$

Dacă punem $t_{m+1}=0$, obținem funcția caracteristică a celor m forme liniare. Vom obține

$$\Phi(t_1, \ldots, t_m, 0) = e^{-\frac{\sigma^2 Q}{2}} \prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} A_r \cdot (i\sigma\sqrt{2})^r \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}t_k\right)^r\right\}$$

și densitatea de repartiție corespunzătoare

$$\psi = \psi(u_1, \ldots, u_m) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \iint \ldots \int e^{-L-\frac{\sigma^2 Q}{2}} \prod_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} A_r \cdot (i\sigma\sqrt{2})^r \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k \right)^2 \right\} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n,$$

unde

$$L = i \sum_{k=1}^{m} t_k u_k = i \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k \right\} x_j$$

și

$$-L - \frac{\sigma^2 Q}{2} = -\sum_{j=1}^{n} \left\{ i \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k \right) x_j + \frac{\sigma^2}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k \right)^2 \right\} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{kj} t_k + \frac{i x_j}{\sigma^2} \right\}^2 .$$

În sfîrșit

$$\psi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{2\sigma^2}} \iint \ldots \int \prod_{j=1}^{n} \left[e^{-\frac{\sigma^2}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k + \frac{i x_j}{\sigma^2} \right)^2} \times \right.$$

$$\left. \times A_r \cdot (i\sigma\sqrt{2})^r \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} t_k \right)^2 \right] \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_m.$$

Să considerăm un caz particular, în care

$$m = 1, \; a_{kj} = a_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = b_n^2.$$

Atunci avem

$$\Phi(t_1, 0) = e^{-\frac{b_n^2 \sigma^2}{2} t_1^2} \prod_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (i \cdot a_j \cdot \sigma \sqrt{2})^r t_1^r \right\} =$$

$$= e^{-\frac{b_n^2 \sigma^2}{2} t_1^2} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{r_n=0}^{\infty} A_{r_1} A_{r_2} \ldots A_{r_n} (i \cdot \sigma \cdot \sqrt{2})^{r_1+r_2+\cdots+r_n} \times$$

$$\times a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n} t_1^{r_1+r_2\cdots+r_n}$$

și

$$\psi(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2 b_n^2}} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{r_n=0}^{\infty} A_{r_1} \ldots A_{r_n} (i \cdot \sigma \cdot \sqrt{2})^R \times$$

$$\times a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b_n^2 \sigma^2}{2} \left(t + \frac{iu}{b_n^2 \sigma^2} \right)^2} t^R \, \mathrm{d}t,$$

unde $R = r_1 + \ldots + r_n$.

54. *Dacă $\varphi(t)$ este o funcție reală, continuă și pară, cu $\varphi(0) = 1$ și dacă*

$$C_{2n} = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ e^{-t^2} H_{2n}(t)\mathrm{d}t$$

$n = 1, 2, \ldots$, atunci să se arate că condiția necesară și suficientă pentru ca $\varphi(t)$ să fie funcție caracteristică este ca $c_{2n} \geqslant 0$, pentru orice n. Am notat cu $H_{2n}(t)$ polinoamele lui Hermite.

SOLUȚIE. Din definiția polinoamelor lui Hermite avem

$$e^{-t^2} H_{2n}(t) = \frac{d^{2n}(e^{-t^2})}{\mathrm{d}t^{2n}},$$

și integrînd prin părți obținem

$$C_{2n} = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă $f(x)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice $\varphi(t)$, atunci

$$(-1)^n \varphi^{(2n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} f(x)\ e^{itx}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Ținînd seama de o relație a lui Nielsen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} (x + it)^n \mathrm{d}x = \sqrt{a\pi}\left(-\frac{a}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot H_n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right),$$

și observînd că primul membru al egalității (1) este proporțional cu o funcție caracteristică, factorul de proporționalitate fiind M_{2n}, adică momentul de ordinul $2n$ al lui $f(x)$, iar produsul $(-1)^n \varphi^{(2n)}(t) e^{-t^2}$ este o funcție caracteristică pe care o vom nota cu $M_{2n}\,\Phi(t)$, atunci

$$C_{2n} = M_{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t,$$

de unde rezultă că

$$C_{2n} = \frac{M_{2n}}{2\pi} g(0)$$

deci $C_{2n} \geqslant 0$ pentru orice n, unde $g(0)$ este densitatea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice $\Phi(t)$.

Observație. Ținînd seama de relațiile stabilite mai înainte, observăm că

$$C_{2n} = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\ e^{-\frac{x^2}{4}} f(x)\mathrm{d}x,$$

de unde rezultă că $C_{2n} \geqslant 0$.

Să evaluăm acum momentele legii date, în funcție de C_{2n}. Avem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{C_{2n}}{2^{2n}(2n)!} H_{2n}(t).$$

Ținînd seama de (1) putem scrie că

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \varphi^{(2r)}(0)}{2r!} t^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r M_{2r}}{2r!} t^{2r}.$$

Cum însă

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!},$$

vom obține

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \cdot \frac{2^{2r}}{2r!} \left[\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{C_{2n}}{2^{2n}(n-r)!} \right] t^{2r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1) = \frac{1}{2r!} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+2r}}{2^{2n} n!} \right] t^{2r}$$

și deci

$$M_{2r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+2r}}{2^{2n} n!}.$$

ȘIRURI DE VARIABILE ALEATOARE. CONVERGENȚE

§ 1. Legi limită. Legea numerelor mari

1. *Fie* ξ *o variabilă aleatoare astfel încît* $M(e^{a\xi})$ *există* ($a > 0$, *constantă*). *Să se arate că*

$$P(\omega : \xi(\omega) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M(e^{a\xi})}{e^{a\varepsilon}}.$$

SOLUȚIE. Putem scrie imediat egalitatea

$$P(\omega : \xi(\omega) \geqslant \varepsilon) = \int_{(\omega:\xi(\omega)\geqslant\varepsilon)} dP(\omega).$$

Cum pe mulțimea $(\omega : \xi(\omega) \geqslant \varepsilon)$ avem $\frac{e^{a\xi(\omega)}}{e^{a\varepsilon}} \geqslant 1$ rezultă că putem scrie mai departe

$$\int_{(\omega:\xi(\omega)\geqslant\varepsilon)} dP(\omega) \leqslant \frac{1}{e^{a\varepsilon}} \int_{(\omega:\xi(\omega)\geqslant\varepsilon)} e^{a\xi(\omega)}\, dP(\omega) \leqslant \frac{1}{e^{a\varepsilon}} \int_{\Omega} e^{a\xi(\omega)} dP(\omega) = \frac{M(e^{a\xi})}{e^{a\varepsilon}}$$

întrucît $M(e^{a\xi})$ există prin ipoteză.

Aceasta ne dovedește inegalitatea propusă.

2. *Fie* $f(x) > 0$ *o funcție nedescrescătoare. Să se arate că dacă există* $M(f(|\xi - M(\xi)|))$, *atunci*

$$P(\omega : |\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M(f(|\xi - M(\xi)|))}{f(\varepsilon)}.$$

SOLUȚIE. Ca și în exercițiul precedent putem scrie imediat

$$P(\omega : |\xi(\omega) - M(\xi)| \geqslant \varepsilon) = \int_{(\omega:\ |\xi(\omega) - M(\xi)| \geqslant \varepsilon)} dP(\omega).$$

Din proprietăţile funcţiei $f(x)$ rezultă că putem continua cu inegalităţile

$$\int_{(\omega : |\xi(\omega) - M(\xi)| \geqslant \varepsilon)} dP(\omega) \leqslant \frac{1}{f(\varepsilon)} \int_{(\omega : |\xi(\omega) - M(\xi)| \geqslant \varepsilon)} f(|\xi(\omega) - M(\xi)|) dP(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{f(\varepsilon)} \int_{\Omega} f(|\xi(\omega) - M(\xi)|) dP(\omega) = \frac{M(f(|\xi - M(\xi)|))}{f(\varepsilon)}.$$

Cu aceasta, inegalitatea propusă este dovedită.

3. *Într-un studiu biologic sînt analizate* 1000 *de fructe pentru a vedea prezenţa sau absenţa unei anumite caracteristici.*

Dacă pentru probabilitatea p ca un fruct să aibă caracteristica aleasă se foloseşte estimaţia $\overline{p}$, să se arate cît de mult poate diferi $\overline{p}$ de adevărata valoare p.

SOLUŢIE. Media aritmetică $\overline{p}$ este o variabilă aleatoare cu media $\mu_{\overline{p}} = p$ şi dispersia $\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Să aplicăm acum inegalitatea lui Cebîşev variabilei $\overline{p}$

$$P(|\overline{p} - p| \leqslant h\,\sigma_{\overline{p}}) \geqslant 1 - \frac{1}{h^2}.$$

Cum însă nu cunoaştem mărimea $\sigma_{\overline{p}}$ pentru că nu cunoaştem valoarea lui p, vom căuta maximul funcţiei $\sigma_{\overline{p}}^2 = \frac{pq}{n}$.

Se vede imediat că graficul funcţiei $pq = p(1 - p)$ este o parabolă simetrică faţă de dreapta $p = \frac{1}{2}$. Deci pq îşi atinge maximul cînd $p = q = \frac{1}{2}$ şi de aici valoarea maximă a lui $\sigma_{\overline{p}}$ este egală cu $\frac{1}{\sqrt{4n}}$.

Din inegalitatea lui Cebîşev pentru $h = 2$ putem spune cu o probabilitatea de cel puţin 0,75 că distanţa dintre $\overline{p}$ şi p nu este mai mare ca $\frac{2}{\sqrt{4n}}$.

În cazul nostru $n = 1000$ şi deci

$$|\overline{p} - p| \leqslant \frac{2}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{1000} \simeq 0{,}032$$

cu o probabilitate de cel puţin 0,75.

4. *Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiţie este*

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{dacă } x > 0, \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se arate că

$$P(0 < \xi < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}.$$

SOLUȚIE. Să aplicăm inegalitatea lui Cebîșev sub forma

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) > 1 - \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Trebuie deci să calculăm $M(\xi)$ și $D^2(\xi)$.

$$M(\xi) = \frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+1}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+2)}{m!} = \frac{(m+1)!}{m!} = m+1.$$

Analog avem

$$M(\xi^2) = \frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+2}e^{-x}dx = (m+1)(m+2)$$

de unde rezultă că

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = m+1.$$

Dacă luăm $\varepsilon = m+1$, atunci inegalitatea lui Cebîșev ne dă

$$P(|\xi - (m+1)| < m+1) > \frac{m}{m+1}$$

de unde urmează imediat că

$$P(0 < \xi < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1},$$

adică inegalitatea ce ne-am propus s-o dovedim.

5. *Se consideră variabila aleatoare* ξ *a cărei densitate de repartiție este*

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(1+\alpha)} & \text{dacă } x > 0, \\ 0 & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Să se arate că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, *pentru* α *suficient de mic, cu o probabilitate oricît de apropiată de* 1 *se poate afirma că* $|\xi| < \varepsilon$.

SOLUȚIE. Să aplicăm inegalitatea lui Cebîșev sub forma

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon_0) > 1 - \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon_0^2}.$$

În cazul nostru avem

$$M(\xi) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(1+\alpha)}dx = \frac{\alpha^{\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} = \alpha(\alpha+1).$$

Analog avem

$$M(\xi^2) = \frac{1}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+2} e^{-\frac{x}{\alpha}} dx = \alpha^2(\alpha+1)(\alpha+2).$$

De aici urmează că

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \alpha^2(\alpha+1).$$

Cu acestea, inegalitatea lui Cebîşev devine

$$P(|\xi - \alpha(\alpha+1)| < \varepsilon_0) > 1 - \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\varepsilon_0^2},$$

pe care o mai putem scrie sub forma

$$P(-\varepsilon_0 + \alpha(\alpha+1) < \xi < \varepsilon_0 + \alpha(\alpha+1)) > 1 - \frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\varepsilon_0^2}.$$

De aici urmează că pentru α suficient de mic avem

$$P(|\xi| < \varepsilon) > 1 - \eta.$$

6. *Aplicînd inegalitatea lui Cebîşev să se găsească limita inferioară a probabilităţii inegalităţii*

$$\left| \frac{\alpha}{10^5} - \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{100}$$

unde α reprezintă numărul de apariţii ale feţei 5 în 100 000 aruncări de zar.

SOLUŢIE. Aplicînd inegalitatea lui Cebîşev, găsim

$$P\left(\left|\frac{\alpha}{10^5} - \frac{1}{6}\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 1 - \frac{M_2\left(\left|\frac{\alpha}{10^5} - \frac{1}{6}\right|\right)}{10^{-4}}$$

Dar

$$M_2\left(\left|\frac{\alpha}{10^5} - \frac{1}{6}\right|\right) = M\left(\frac{\alpha^2}{10^{10}} - \frac{\alpha}{3\cdot 10^5} + \frac{1}{36}\right) = \frac{M(\alpha^2)}{10^{10}} - \frac{M(\alpha)}{3\cdot 10^5} + \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{10^{10}}{36\cdot 10^{10}} + \frac{10^5\cdot 5}{36\cdot 10^{10}} - \frac{10^5}{18\cdot 10^5} + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} + \frac{5}{36\cdot 10^5} - \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36\cdot 10^5}$$

întrucît avem

$$p = \frac{1}{6}; \quad q = \frac{5}{6}; \quad n = 10^5,$$

$$M(\alpha) = np = \frac{10^5}{6},$$

$$M(\alpha^2) = n^2p^2 + npq = \frac{10^{10}}{36} + \frac{10^5\cdot 5}{36}.$$

Deci

$$P\left(\left|\frac{\alpha}{10^5}-\frac{1}{6}\right|<10^{-2}\right)\geqslant 1-\frac{10^4\cdot 5}{36\cdot 10^5}=1-\frac{5}{36\cdot 10}=1-\frac{1}{36\cdot 2}=\frac{71}{72}$$

$$P\left(\left|\frac{\alpha}{10^5}-\frac{1}{6}\right|<10^{-2}\right)\geqslant\frac{71}{72}.$$

7. *Se aruncă o monetă de n ori. Cît de mare trebuie să fie n pentru ca probabilitatea inegalității*

$$\left|\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$$

să fie mai mare decît 0,99, *știind că* α *reprezintă numărul de apariții ale unei fețe alese de mai înainte.*

SOLUȚIE. Aplicăm inegalitatea lui Cebîșev

$$P\left(\left|\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}\right)\geqslant 1-\frac{M_2\left(\left|\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}\right|\right)}{10^{-4}},$$

Dar

$$M_2\left(\left|\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}\right|\right)=M\left(\left|\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}\right|^2\right)=M\left(\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{M(\alpha^2)}{n^2}-\frac{M(\alpha)}{n}+\frac{1}{4}=\frac{n^2p^2}{n^2}+\frac{npq}{n^2}-\frac{np}{n}+\frac{1}{4}=p^2+\frac{pq}{n}-p+\frac{1}{4}=\frac{1}{4n},$$

căci

$$p=q=\frac{1}{2}.$$

Aflăm astfel

$$P\left(\left|\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}\right|<10^{-2}\right)\geqslant 1-\frac{10^4}{4n}.$$

Dacă vom lua

$$1-\frac{10^4}{4n}>\frac{99}{100}$$

găsim

$$\frac{10^4}{4n}<1-\frac{99}{100}=\frac{1}{100}.$$

sau

$$n>\frac{10^6}{4}=5^2\cdot 10^4.$$

Așadar dacă $n>5^2.10^4$ avem îndeplinită condiția cerută de problemă.

8. *Cu ce probabilitate putem afirma că din* 100 *de aruncări a unei monede, stema apare de un număr de ori cuprins între* 40 *şi* 60 *?*

SOLUŢIE. Aplicăm teorema lui Moivre-Laplace care ne spune că

$$P\left(\alpha \leqslant \sqrt{\frac{n}{pq}}\,(\xi_n - p) \leqslant \beta\right) \simeq \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

unde am notat cu ξ_n variabila aleatoare care ne dă numărul de apariţii ale stemei cînd aruncăm moneda de n ori.

În cazul nostru

$$p = q = \frac{1}{2}, \quad n = 100.$$

De aici rezultă că

$$\alpha = \sqrt{\frac{100}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\,(0{,}4 - 0{,}5) = -2$$

şi

$$\beta = \sqrt{\frac{100}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\,(0{,}6 - 0{,}5) = 2.$$

Căutînd într-o tabelă pentru funcţia $\Phi(x)$ găsim

$$\Phi(2) = 1 - \Phi(-2) = 0{,}9772.$$

De aici urmează că

$$P\ (0{,}4 \leqslant \xi_n \leqslant 0{,}6) \simeq 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544.$$

9. *De cîte ori este suficient să aruncăm un zar, pentru ca, cu o probabilitate de* 0,99 *să putem afirma că faţa* 6 *apare cu o frecvenţă cuprinsă între*

$$\frac{1}{6} - 0{,}05 \text{ şi } \frac{1}{6} + 0{,}05 \text{ ?}$$

SOLUŢIE. Aplicăm tot teorema lui Moivre-Laplace sub forma

$$P\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\,|\,\xi_n - p\,| \leqslant \beta\right) \simeq 2\Phi(\beta) - 1 = 0{,}99.$$

În cazul nostru $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$ iar din relaţia $2\Phi(\beta) - 1 = 0{,}99$ aflăm valoarea lui β.

Avem $\Phi(\beta) = 0{,}995$ şi tabelele pentru funcţia Φ ne dau pentru β valoarea

$$\beta = 2{,}57.$$

Aflăm acum pe n din egalitatea

$$\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\cdot 0{,}05 = 2{,}57,$$

care ne conduce la valoarea lui $n = 368$.

Observația 1. Dacă aplicăm regula 3σ în formularea teoremei lui Moivre-Laplace obținem

$$P(|\xi_n - p| < 3\sigma) \simeq 2\Phi(3) - 1 = 0{,}9973.$$

Cum $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ obținem

$$P\left(|\xi_n - p| < 3\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \simeq 0{,}9973.$$

În acest caz obținem pentru n valoarea

$$3\sqrt{\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n}} = 0{,}05$$

sau încă $n = 500$.

Observația 2. Să rezolvăm aceeași problemă folosind inegalitatea lui Cebîșev. Vom putea scrie

$$P(|\xi_n - p| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D^2(\xi_n)}{\varepsilon^2}.$$

Deoarece $D^2(\xi_n) = \frac{pq}{n}$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $\varepsilon = 0{,}05$ va trebui să avem îndeplinită inegalitatea

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n\cdot(0{,}05)^2} < 0{,}01$$

care ne conduce la

$$\frac{200.000}{36} < n.$$

Deci $n > 5555$.

10. *Se aruncă un zar de* 500 *ori. Cu ce probabilitate putem afirma că obținem fața* 6 *de cel mult* 90 *de ori?*

Soluție. Ne folosim de teorema lui Moivre-Laplace care ne spune că

$$P\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}(\xi_n - p) \leqslant \beta\right) \simeq \Phi(\beta),$$

unde ca și pînă acum am notat cu ξ_n variabila aleatoare, frecvența de apariție a evenimentului considerat.

Cum probabilitatea apariţiei feţei 6 într-o aruncare este $p = \frac{1}{6}$, atunci $q = \frac{5}{6}$.

Ni s-a dat $n = 500$. Urmează deci că

$$\beta = \sqrt{\frac{500}{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \left(\frac{90}{500} - \frac{1}{6} \right) = 60 \cdot \frac{4}{300} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Din tabele pentru funcţia $\Phi(x)$ găsim că

$$\Phi(0{,}8) = 0{,}788.$$

Prin urmare putem afirma că

$$P\left(\xi_n \leqslant \frac{9}{50} \right) \simeq 0{,}788.$$

11. *De cîte ori trebuie să aruncăm o monedă, astfel încît să putem afirma cu o probabilitate de* 0,99, *ca frecvenţa apariţiei stemei să fie între* 40% *şi* 52%?

SOLUŢIE. Folosim şi aici teorema lui Moivre-Laplace sub forma

$$P\left(\alpha \leqslant \sqrt{\frac{n}{pq}} (\xi_n - p) \leqslant \beta \right) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Întrucît din datele problemei avem $p = q = \frac{1}{2}$, rezultă pentru α

$$\alpha = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \left(\frac{48}{100} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{4\sqrt{n}}{50} = -\frac{2\sqrt{n}}{25},$$

analog se calculează β şi se găseşte că $\beta = \frac{2\sqrt{n}}{25}$, deci $\alpha = -\beta$.

Atunci putem scrie

$$P\left(\sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} \, |\xi_n - p| \leqslant \beta \right) \simeq 2\Phi(\beta) - 1.$$

Cum $2\Phi(\beta) - 1 = 0{,}99$, urmează că $\Phi(\beta) = 0{,}995$ şi de aici cu ajutorul tabelelor $\beta = 2{,}57$. Putem afla acum numărul n din relaţia

$$\frac{2\sqrt{n}}{25} = 2{,}57.$$

De aici urmează $\sqrt{n} \simeq 32{,}125$ şi prin urmare

$$n = 1\,033.$$

12. *De cîte ori trebuie aruncată o monedă pentru ca să putem spune cu o probabilitate de* 0,6 *că abaterea frecvenței de apariție a stemei de la probabilitatea* $p = \frac{1}{2}$ *să fie mai mică decît* 0,01?

SOLUȚIE. Să folosim pentru aceasta teorema lui Moivre-Laplace. Atunci

$$P\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\,|\xi_n - p| \leqslant \beta\right) \simeq 2\,\Phi(\beta) - 1.$$

Nouă ni s-a dat

$$2\,\Phi(\beta) - 1 = 0{,}6.$$

Rezultă de aici că $\Phi(\beta) = 0{,}8$, iar din tabelele pentru funcția $\Phi(x)$ găsim $\beta = 0{,}84$.

Cum $p = q = \frac{1}{2}$ putem afla valoarea lui n din relația

$$0{,}84 = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \cdot 0{,}01,$$

care ne conduce la $2\sqrt{n} = 84$ sau încă $n = 1\,764$.

13. *Se aruncă de* 360 *de ori cu o pereche de zaruri. Cu ce probabilitate ne putem aștepta ca să apară* 12 *puncte (dubla* 6) *de un număr de ori cuprinsă între* 8 *și* 12?

SOLUȚIE. Probabilitatea ca să apară 12 puncte într-o aruncare cu două zaruri este $p = \frac{1}{36}$, iar probabilitatea ca să nu apară 12 puncte este $q = 1 - p = \frac{35}{36}$.

O să folosim și aici teorema lui Moivre-Laplace

$$P\left(\alpha \leqslant \sqrt{\frac{n}{p\,q}}\,(\xi_n - p) \leqslant \beta\right) \simeq \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Cum $n = 360$ avem pentru valorile α și β:

$$\alpha = \sqrt{\frac{360}{\frac{1}{36}\cdot\frac{35}{36}}}\left(\frac{1}{45} - \frac{1}{36}\right) = -\frac{6}{5\sqrt{3{,}5}} \simeq -0{,}641,$$

$$= \sqrt{\frac{360}{\frac{1}{36}\cdot\frac{35}{36}}}\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{36}\right) = \frac{6}{5\sqrt{3{,}5}} \simeq 0{,}641.$$

Cum $\alpha = -\beta$, atunci $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = 2\Phi(\beta) - 1$. Însă $\beta = 0{,}641$ şi din tabelele pentru funcţia $\Phi(x)$ aflăm $\Phi(\beta) = 0{,}7389$.

Aceasta ne conduce la rezultatul

$$P\left(-\frac{6}{5\sqrt{3{,}5}} \leqslant \xi_n - \frac{1}{36} \leqslant \frac{6}{5\sqrt{3{,}5}}\right) \approx 0{,}48.$$

14. *Se efectuează o experienţă în care poate să apară evenimentul A, sau să nu apară. Să se arate că dacă în fiecare probă probabilitatea apariţiei evenimentului A este* $p = \frac{1}{2}$, *numărul probelor este n, iar* β *este mare, atunci frecvenţa* ξ_n *de apariţie a evenimentului A satisface următoarea inegalitate:*

$$P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| > \frac{\beta}{2\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{2}}.$$

SOLUŢIE. După formula lui Laplace putem scrie imediat:

$$P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| > \frac{\beta}{2\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\beta}{2\sqrt{n}}\right) \simeq$$

$$\simeq 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\, dx.$$

Să evaluăm această integrală pentru β suficient de mare.

Pornim pentru aceasta de la integrala dublă

$$\left(\int_0^R e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2}\, dx dy > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R e^{-\rho^2}\, \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}).$$

Urmează de aici că avem satisfăcută inegalitatea

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^R e^{-x^2}\, dx > \sqrt{1 - e^{-R^2}} > 1 - \frac{1}{2} e^{-R^2}$$

care ne conduce la inegalitatea

$$P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| > \frac{\beta}{2\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta^2}{2}},$$

adică tocmai ceea ce ne-am propus să dovedim.

15. *Se poate afirma cu o probabilitate de* 0,97 *că din* 1000 *de aruncări ale unei monede, apare stema de un număr de ori cuprins între* 450 *şi* 600?

SOLUŢIE. Probabilitatea apariţiei stemei într-o aruncare este $p = \frac{1}{2}$.

Intervalul în care va oscila frecvenţa este (0,45, 0,6).

Inegalitatea lui Cebîșev ne spune că

$$P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon\right) > 1 - \frac{D^2(\xi_n)}{\varepsilon^2}.$$

În cazul nostru putem lua $\varepsilon = 0{,}1$ și cum $p = q = \frac{1}{2}$, $n = 1\,000$ iar $D^2(\xi_n) = \frac{pq}{n}$, urmează că avem

$$P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0{,}1\right) > 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1\,000 \cdot 0{,}01} = 1 - \frac{1}{40} = 1 - 0{,}025.$$

Prin urmare, din faptul că $P\left(\left|\xi_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0{,}1\right) > 0{,}975$ rezultă că putem afirma cu o probabilitate de 0,97 (putem afirma chiar cu o probabilitate de 0,975) că numărul de apariții ale stemei este cuprins între 450 și 600 cînd aruncăm de 1000 de ori cu o monedă.

16. *Fie* $(\xi_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *un șir de variabile aleatoare independente care pot lua valorile* $\pm\sqrt{n}$ *și* 0 *(zero) cu probabilitățile*

$$P(\xi_1 = 0) = 1$$

$$P(\xi_k = \sqrt{k}) = P(\xi_k = -\sqrt{k}) = \frac{1}{k}, \quad P(\xi_k = 0) = 1 - \frac{2}{k}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Să se arate că șirul dat se supune legii numerelor mari.

SOLUȚIE. Avem imediat că

$$M(\xi_k) = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$
$$D^2(\xi_k) = 2, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Formînd variabila aleatoare

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

obținem

$$M(\eta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = 0$$

și

$$D^2(\eta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k} D^2(\xi_k) = \frac{2(n-1)}{n^2}.$$

Avem îndeplinite condiţiile teoremei lui Cebîşev şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - M(\eta_n)| < \varepsilon) = 1$$

adică şirului $(\varepsilon_n)_{1\leqslant n<\infty}$ i se poate aplica legea numerelor mari în formularea lui Cebîşev.

17. *Fie* $(\xi_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un şir de variabile aleatoare independente care pot lua valorile* $\pm\sqrt{\lg n}$ *cu probabilităţile*

$$P(\xi_k = \sqrt{\lg k}) = P(\xi_k = -\sqrt{\lg k}) = \frac{1}{2},\ k = 2,\ 3,\ \ldots,\ P(\xi_1 = 0) = 1.$$

Să se arate că şirul dat se supune legii numerelor mari în formularea lui Cebîşev.

SOLUŢIE. Se constată imediat că avem următoarele egalităţi

$$M(\xi_k) = 0,\ k = 2,\ 3,\ \ldots$$
$$D^2(\xi_k) = \lg k,\ k = 2,\ 3,\ \ldots$$

Să punem acum

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

Atunci

$$M(\eta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = 0,$$

$$D^2(\eta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lg k.$$

Însă $D^2(\eta_n)$ poate fi majorată după cum urmează :

$$\sum_{k=1}^{n} \lg k < \int_1^{n+1} \lg x\,dx = x\lg x\Big|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dx = (n+1)\lg(n+1) - n.$$

Deci

$$D^2(\eta_n) < \frac{(n+1)\lg(n+1) - n}{n^2}$$

de unde urmează că

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\eta_n) = 0.$$

Prin urmare sînt îndeplinite condiţiile teoremei lui Markov şi deci avem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

care dovedeşte că şirului dat i se poate aplica legea numerelor mari.

18. *Se consideră șirul de variabile aleatoare independente* $(\xi_n)_{n\in N}$ *ale căror valori și probabilități sînt date de*

$$\xi_k\begin{pmatrix} -k & -(k-1) & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & k-1 & k \\ \frac{1}{3k^3} & \frac{1}{3(k-1)^3} & \cdots & \frac{1}{3} & 1-\frac{2}{3}\left(1+\dots+\frac{1}{k^3}\right) & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{3(k-1)^3} & \frac{1}{3k^3} \end{pmatrix}.$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Să se arate că șirul dat se supune legii numerelor mari în formularea lui Cebîșev.

SOLUȚIE. Să calculăm mai întîi valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare ξ_k, $k = 1, 2, 3, \dots$

Avem, conform definiției valorii medii

$$M(\xi_k) = -\frac{k}{3k^3} - \frac{(k-1)}{3(k-1)^3} - \dots$$

$$\cdots - \frac{1}{3} + 0.\left[1 - \frac{2}{3}\left(1 + \cdots + \frac{1}{k^3}\right)\right] + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{k-1}{3(k-1)^3} + \frac{k}{3k^3} = 0.$$

De asemenea

$$D^2(\xi_k) = \frac{2}{3}\left(\frac{k^2}{k^3} + \frac{(k-1)^2}{(k-1)^3} + \cdots + \frac{2^2}{2^3} + \frac{1^2}{1^3}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Însă pentru $D^2(\xi_k)$ avem majorarea:

$$D^2(\xi_k) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) < \frac{2}{3}\left(1 + \int_1 \frac{dx}{x}\right) = \frac{2}{3}(1 + \lg k).$$

Dacă acum introducem variabila aleatoare

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

evident, avem

$$M(\eta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = 0 \text{ și } D^2(\eta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k).$$

Cu aceste notații vom putea scrie

$$D^2(\eta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) < \frac{2}{3n^2}\sum_{k=1}^{n}(1 + \lg k) < \frac{2}{3n^2}\left(n + \int_1^n \lg x\, dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3n^2}(n+1)\lg(n+1).$$

De aici urmează că

$$D^2(\eta_n) < \frac{2}{3n^2}(n+1)\lg(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

şi avem îndeplinite condiţiile teoremei lui Markov şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n| < \varepsilon) = 1$$

adică şirul dat se supune legii numerelor mari în formularea lui Cebîşev

19. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un şir de variabile aleatoare independente de valori medii* $M(\xi_n) = 0$, $n \in N^*$ *şi dispersii* $D^2(\xi_n) = n^\lambda$, $n \in N^*$ *unde* $0 < \lambda < 1$. *Să se arate că şirul dat se supune legii numerelor mari.*

SOLUŢIE. Dacă introducem variabila aleatoare

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

atunci din condiţiile cuprinse în enunţ rezultă că

$$M(\eta_n) = 0 \text{ şi } D^2(\eta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^\lambda.$$

Însă din majorarea

$$\sum_{k=1}^{n} k^\lambda < \int_1^{n+1} x^\lambda \, dx = \frac{(n+1)^{\lambda+1} - 1}{\lambda + 1}$$

rezultă că

$$D^2(\eta_n) < \frac{(n+1)^{\lambda+1} - 1}{(\lambda+1)n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

întrucît $\lambda + 1 < 2$.

Deci

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n| < \varepsilon) = 1$$

şi prin urmare şirului dat i se poate aplica legea numerelor mari în formularea lui Cebîşev.

20. *Într-o experienţă se poate realiza evenimentul A cu probabilitatea p sau nu se poate realiza (se realizează* A^c*) cu probabilitatea* $q = 1 - p$. *Se repetă experienţa de n ori. Să se arate că frecvenţa* $\frac{m}{n}$ *a realizării evenimentului A în n experienţe tinde în probabilitate către p.*

SOLUŢIE. Se ştie că probabilitatea ca să apară de m ori evenimentul A cînd se repetă experienţa de n ori este

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Frecvența de apariție a evenimentului A, notată $\frac{m}{n}$ este o variabilă aleatoare a cărei funcție caracteristică este

$$\varphi_n(t) = M\left(e^{it\frac{m}{n}}\right) = \sum_{m=0}^{n} e^{it\frac{m}{n}} C^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{m} C_n^m \left(pe^{i\frac{t}{n}}\right)^m q^{n-m} = \left(pe^{i\frac{t}{n}} + q\right)^n.$$

Să notăm $\alpha = \frac{1}{n}$. Atunci $n \to \infty$ dacă și numai dacă $\alpha \to 0$. Prin logaritmarea funcției caracteristice obținem

$$\ln \varphi_n(t) = n \ln\left(pe^{i\frac{t}{n}} + q\right) = \frac{\ln\left(pe^{i\alpha t} + q\right)}{\alpha}.$$

De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln\left(pe^{i\alpha t} + q\right)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{pit\, e^{i\alpha t}}{pe^{i\alpha t} + q} = ipt$$

sau încă

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{ipt}.$$

Însă e^{ipt} este funcția caracteristică a variabilei aleatoare constante p. Cum aceasta este o condiție necesară și suficientă ca șirul de variabile aleatoare ce admite pe $(\varphi_n(t))_{n\in N^*}$ ca funcții caracteristice să tindă în probabilitate către constanta p, rezultă că $\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$ care dovedește afirmația făcută.

21. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un șir de variabile aleatoare independente cu densitățile de repartiție date respectiv de*

$$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\cdot\sqrt{n}} e^{-\frac{(x-\theta^n)^2}{\sqrt{n}}} \quad \textit{unde } 0 \leqslant \theta < 1.$$

Să se arate că șirul $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *se supune legii numerelor mari.*

SOLUȚIE. Să calculăm mai întîi $M(\xi_k)$ și $D^2(\xi_k)$.

Pentru $M(\xi_k)$ avem

$$M(\xi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_k(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}}\,dx = \theta^k,\ k\in N^*.$$

Mai departe,

$$D^2(\xi_k) = M((\xi_k - M(\xi_k))^2) = M((\xi_k - \theta^k)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\theta^k)^2 \rho_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\cdot\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\theta^k)^2 e^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}}\,dx = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{k}}{2},\ k\in N^*.$$

Să notăm acum cu

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k .$$

Din proprietăţile valorii medii şi din condiţiile specificate în enunţ, rezultă că

$$M(\eta_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \theta^k = \frac{\theta - \theta^{n+1}}{n(1-\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$D^2(\eta_n) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{2} < \frac{n\sqrt{n}}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Aşadar este îndeplinită condiţia din teorema lui Markov şi deci $(\xi_n)_{n\in N^*}$ se supune legii numerelor mari.

22. *Fie şirul de variabile aleatoare independente* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *astfel încît*

$$P\left(\xi_n = \frac{1}{n^\beta}\right) = P\left(\xi_n = -\frac{1}{n^\beta}\right) = p, \ cu \ \frac{1}{3} < \beta \leqslant \frac{1}{2}, \ n \in N^*$$

$$şi \ P(\xi_n = 0) = 1 - 2p.$$

Să se arate că şirului $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *i se poate aplica teorema lui Liapunov.*

SOLUŢIE. Căutăm să vedem dacă este îndeplinită condiţia lui Liapunov. Din condiţiile problemei avem imediat

$$M(\xi_k) = 0, \ k \in N^*.$$

$$M(\xi_k^2) = \mu_k^2 = \frac{2p}{k^{2\beta}}, \ k \in N^*,$$

$$M(|\xi_k|^3) = \rho_k^3 = \frac{2p}{k^{3\beta}}, \ k \in N^*,$$

De aici urmează că

$$\mu_{(n)}^2 = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 = 2p\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2\beta}}$$

şi

$$\rho_{(n)}^3 = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^3 = 2p\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3\beta}} .$$

Întrucît avem $\frac{1}{3} < \beta \leqslant \frac{1}{2}$ sau încă $1 < 3\beta \leqslant \frac{3}{2}$ rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3\beta}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3\beta}}$$

este o serie convergentă.

Pe de altă parte avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2\beta}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

care tinde la ∞ cînd $n \to \infty$.

Prin urmare condiția lui Liapunov

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\rho_{(n)}^3}}{\sqrt{\mu_{(n)}^2}} = 0$$

este îndeplinită și deci șirului $(\xi_n)_{n\in N^*}$ i se poate aplica teorema lui Liapunov.

23. *Fie $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare identic repartizate și fiecare avînd dispersie finită. Dacă variabilele aleatoare sînt independente două cîte două atunci șirului $(\xi_n)_{n\in N^*}$ i se poate aplica legea numerelor mari.*

SOLUȚIE. Din faptul că variabilele aleatoare $(\xi_n)_{n\in N^*}$ sînt identic repartizate și au dispersie finită rezultă

$$D^2(\xi_k) = D^2 < \infty, k = 1, 2, \ldots$$

Nu restrîngem cu nimic generalitatea dacă presupunem $M(\xi_k) = 0$. $k = 1, 2, \ldots$

Atunci dacă notăm cu $\zeta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, aplicînd inegalitatea lui Cebîșev, găsim

$$P(\omega : |\zeta_{n^2}(\omega)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D^2}{n^2 \varepsilon^2}.$$

Aceasta ne conduce la faptul că

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega : |\zeta_{k^2}(\omega)| \geqslant \varepsilon)$$

este convergentă.

După teorema lui Borel-Cantelli urmează că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\zeta_{n^2}(\omega)| \leqslant \varepsilon) = 1. \tag{1}$$

Pe de altă parte avem

$$P\left(\omega : \max_{n^2 < N < (n+1)^2} \left| \sum_{k=n^2+1}^{N} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon n^2\right) \leqslant \sum_{N=n^2+1}^{(n+1)^2-1} P\left(\omega : \left| \sum_{k=n^2+1}^{N} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon n^2\right)$$

și pe baza inegalității lui Cebîșev avem

$$P\left(\omega : \max_{n^2 < N < (n+1)^2} \left| \sum_{k=n^2+1}^{N} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon n^2\right) \leqslant \sum_{N=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \frac{(N-n^2) D^2}{\varepsilon^2 n^2} \leqslant \frac{4D^2}{\varepsilon^2 n^2}$$

şi deci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\omega : \max_{n^2 < N < (n+1)^2} \left| \sum_{k=n^2+1}^{N} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon n^2\right)$$

este convergentă.

După teorema lui Borel-Cantelli găsim

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\omega : \max_{n^2 < N < (n+1)^2} \left| \sum_{k=n^2+1}^{N} \xi_k(\omega) \right| \leqslant \varepsilon n^2\right) = 1. \tag{2}$$

Din inegalităţile (1) şi (2) urmează că pentru $n^2 < N < (n+1)^2$ avem $\lim_{n \to \infty} P(\omega : |\zeta_n(\omega)| \leqslant 2\varepsilon) = 1$, de unde urmează că $\zeta_n \xrightarrow{P} 0$ şi deci că şirul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ se supune legii numerelor mari.

24. *Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare independente şi urmează aceeaşi repartiţie iar $M(\xi_k) = M$ şi $D(\xi_k) = D$, să se arate că*

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k - kM) \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3} P(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - nM > x - 2D\sqrt{n}).$$

SOLUŢIE. Să notăm cu A_k, $k=1, 2, \ldots, n$ evenimentele caracterizate prin faptul că pentru variabilele

$$\eta_j = \frac{1}{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_j - jM)$$

sînt satisfăcute inegalităţile

$$\eta_1 \leqslant \frac{x}{D}, \quad \eta_2 \leqslant \frac{x}{D}, \ldots, \eta_{k-1} \leqslant \frac{x}{D} \text{ şi } \eta_k > \frac{x}{D}.$$

De asemenea să notăm prin B_k evenimentele pentru care

$$\eta_n - \eta_k \geqslant -2\sqrt{n}.$$

Dacă evenimentele A_k şi B_k sînt independente, atunci avem

$$\eta_n > \frac{x}{D} - 2\sqrt{n}$$

eveniment pe care-l vom nota cu A.

Se observă că

$$(A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup \ldots \cup (A_n \cap B_n) \subseteq A,$$

de unde

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B_k) =$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap B_k\right) \leqslant P(A).$$

Deci

$$1 - P(B_k) \leqslant P(|\xi_{k+1} + \xi_{k+2} + \ldots + \xi_n - (n-k)M| > 2D\sqrt{n})$$

și aplicînd inegalitatea lui Cebîșev

$$1 - P(B_k) \leqslant \frac{n-k}{4n} \leqslant \frac{1}{4}$$

adică

$$P(B_k) \geqslant \frac{3}{4}.$$

Atunci

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{3}{4} P\left(\operatorname{Max}_{1\leqslant k\leqslant n} \eta_k > \frac{x}{D}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\eta_n > \frac{x}{D} - 2\sqrt{n}\right)$$

ceea ce trebuia arătat.

25. *Considerăm șirul de variabile aleatoare independente* $(\xi_k)_{k\in N^*}$ *pentru care* $M(\xi_k) = 0$, $D^2(\xi_k) = D_k^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *și seria*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k^2}{k^2} < \infty.$$

Dacă $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, *să se arate că pentru orice* $\varepsilon > 0$ *avem* $P\left(\sup_{k\leqslant n} \left|\frac{\beta_k}{k}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{k^2}\right).$$

SOLUȚIE. Fie

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Atunci

$$M(\eta) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{k^2}. \qquad (1)$$

Să notăm acum cu A_k evenimentele pentru care

$$\frac{|\beta_m|}{m} < \varepsilon,\ m = n, n+1, \ldots, k-1 \text{ și } \frac{|\beta_k|}{k} \geqslant \varepsilon.$$

Fie

$$A = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Atunci evenimentele A_n, A_{n+1}, ..., și A^c constituie o desfacere și deci

$$M(\eta) = \sum_{m=n}^{\infty} M(\eta/A_m)\, P(A_m) + M(\eta/A^c)\, P(A^c).$$

Să examinăm acum valoarea medie condiționată $M(\eta/A_m)$.
Se observă că

$$M(\eta/A_m) = \sum_{k=n}^{\infty} (\beta_k^2/A_m)\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=m}^{\infty} M(\beta_k^2/A_m)\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Dacă $k > m$, avem

$$M(\beta_k^2/A_m) = M(\beta_m^2/A_m) - 2M(\beta_m(\beta_m - \beta_k)/A_m) +$$
$$+ M((\beta_k - \beta_m)^2/A_m).$$

Se observă, din egalitatea de mai înainte, că

$$M(\beta_k^2/A_m) \geqslant M(\beta_m^2/A_m),\ k = m, m+1, \ldots$$

Din definiția evenimentelor A_m știm că $\frac{|\beta_m|}{m} \geqslant \varepsilon$ și deci inegalitatea de mai înainte devine

$$M(\beta_k^2/A_m) \geqslant \varepsilon^2 m^2.$$

Atunci

$$M(\eta/A_m) \geqslant \varepsilon^2.$$

Putem scrie, deci

$$M(\eta) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = \varepsilon^2 P(A) =$$

$$= \varepsilon^2 P\left(\sup_{k \geqslant n} \frac{|\beta_k|}{k} \geqslant \varepsilon\right).$$

Dacă ținem seama de (1) rezultă

$$P\left(\sup_{k\geqslant n}\frac{|\beta_k|}{k}\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}D_k^2}{n^2}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{D_k^2}{k^2}\right).$$

26. *Fie* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un șir de variabile aleatoare independente astfel încît*

$$P(\xi_k=-\sqrt{k})=P(\xi_k=\sqrt{k})=\frac{1}{2}.$$

Să se arate că șirului dat i se poate aplica teorema lui Liapunov.

SOLUȚIE. Se constată imediat că $M(\xi_k)=0$.

De asemenea avem

$$M(\xi_k^2)=k=\mu_k^2,\ k=1,2,3,\ldots$$

și

$$M(|\xi_k|^3)=k^{\frac{3}{2}}=\rho_k^3,\ k=1,2,3,\ldots$$

De aici urmează că avem

$$\mu_{(n)}^2=\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

și

$$\rho_{(n)}^3=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^3=\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}.$$

Prin urmare

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{\mu_{(n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n\cdot n^{\frac{3}{2}}}}{n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}}=0.$$

Fiind îndeplinită această condiție, urmează că se poate aplica teorema lui Liapunov.

27. *Să se afle limita cînd* $n\to\infty$ *din expresia*

$$I_n=\int_0^1\ldots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1,\ldots,dx_n$$

f fiind o funcție continuă pe (0, 1).

SOLUŢIE. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente fiecare urmînd o lege uniformă pe $[0, 1]$. Atunci evident avem

$$I_n = M\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\right).$$

După legea tare a numerelor mari avem că

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{aproape sigur}} \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte aplicînd inegalitatea lui Cebîşev, avem

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{12n\varepsilon^2}$$

întrucît

$$D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D^2(\xi_k)$$

$$D^2(\xi_k) = (M\xi_k^2) - (M(\xi_k))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Să arătăm că există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $\left|I_n - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$ care ne va dovedi că limita expresiei considerate este $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Într-adevăr, dacă notăm cu P_n funcţia de probabilitate a vectorului aleator $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ atunci putem scrie

$$I_n = \int_\Omega f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\mathrm{d}P_n,$$

vom putea să scriem însă

$$I_n = \int_\Omega f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\mathrm{d}P_n = \int_{\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{2}\right| \geqslant \eta\right\}} f\,\mathrm{d}P_n +$$

$$+ \int_{\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{2}\right| < \eta\right\}} f\,\mathrm{d}P_n = A_n + B_n.$$

Din faptul că f ia valori în $(0, 1)$ rezultă că

$$A_n \leqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{2}\right| > \eta\right) \leqslant \frac{1}{12n\eta^2},$$

f fiind o funcţie continuă, putem scrie inegalităţile

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - \eta < B_n < f\left(\frac{1}{2}\right) + \eta.$$

Dacă punem acum $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$ iar $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} I_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

§ 2. Tipuri de convergență

1. *Fie ξ și η două variabile aleatoare și a, ε două numere reale cu $\varepsilon > 0$. Atunci avem îndeplinită inegalitatea*

$$|F_\xi(a) - F_\eta(a)| \leqslant F_\xi(a+\varepsilon) - F_\eta(a-\varepsilon) + P(\omega : |\xi(\omega) - \eta(\omega)| \geqslant \varepsilon)$$

SOLUȚIE. Pornim de la următoarea incluziune

$$\{\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) \geqslant a\} \cup \{\omega : \xi(\omega) \geqslant a;\ \eta(\omega) < a\} \subset$$
$$\subset \{\omega : a - \varepsilon \leqslant \xi(\omega) < a + \varepsilon\} \cup \{\omega : |\xi(\omega) - \eta(\omega)| \geqslant a\}.$$

Luînd probabilitatea acestei incluziuni obținem

$$P(\omega : \xi(\omega) < a, \eta(\omega) \geqslant a) + P(\omega : \xi(\omega) \geqslant a, \eta(\omega) < a) \leqslant$$
$$\leqslant F_\xi(a+\varepsilon) - F_\xi(a-\varepsilon) + P(\omega : |\xi(\omega) - \eta(\omega)| \geqslant a).$$

Cum însă

$$P(\omega : \xi(\omega) < a) = P(\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) < a) +$$
$$+ P(\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) \geqslant a)$$

și

$$P(\omega : \eta(\omega) < a) = P(\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) < a) +$$
$$+ P(\omega : \xi(\omega) \geqslant a;\ \eta(\omega) < a)$$

deducem că

$$F_\xi(a) - F_\eta(a) = P(\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) \geqslant a) -$$
$$- P(\omega : \xi(\omega) \geqslant a;\ \eta(\omega) < a) \leqslant P(\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) \geqslant a)$$

și analog

$$F_\eta(a) - F_\xi(a) \leqslant P(\omega : \xi(\omega) \geqslant a;\ \eta(\omega) < a)$$

de unde obținem

$$|F_\xi(a) - F_\eta(a)| \leqslant P(\omega : \xi(\omega) < a;\ \eta(\omega) \geqslant a) + P(\omega : \xi(\omega) \geqslant a;$$
$$\eta(\omega) < a) \leqslant F_\xi(a+\omega) - F_\eta(a-\varepsilon) + P(\omega : |\xi(\omega) - \eta(\omega)| \geqslant a).$$

2. *Să se arate că dacă $(\xi_n)_{n\in N^*}$ converge în repartiție, nu rezultă că el converge și în probabilitate.*

SOLUȚIE. Să considerăm cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ unde $\Omega = [0, 1]$, $K = B_{[0,1]}$ și P măsura Lebesgue pe dreaptă.

Să definim şirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N^*}$ în felul următor :

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 1 & \text{dacă } \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

şi variabila aleatoare ξ astfel

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{dacă } \omega \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Atunci

$$P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| = 1) = 1$$

şi deci şirul $(\xi_n)_{n\in N^*}$ nu converge în probabilitate către ξ.

Să aflăm funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare ξ_n şi ξ $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$F_n(x) = P(\omega : \xi_n(\omega) < x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

$$F(x) = P(\omega : \xi(\omega) < x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$$

deci

$$F_n(x) = F(x), \quad x \in R, \quad n = 1, 2, \ldots$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad x \in R,$$

ceea ce dovedeşte că şirul $(\xi_n)_{n\in N^*}$ converge în repartiţie către ξ.

3. *Se ştie că funcţia caracteristică este continuă pentru orice $t \in R$, precum şi teorema : Dacă $(F_n(x))_{n\in N^*}$ este un şir de funcţii de repartiţie şi $(\varphi_n(t))_{n\in N^*}$ şirul funcţiilor caracteristice corespunzătoare, atunci şirul $(F_n(x))_{n\in N^*}$ converge către funcţia de repartiţie $F(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice t, şirul $(\varphi_n(t))_{n\in N^*}$ converge către o limită $\varphi(t)$ continuă în punctul $t = 0$.*

Rezultă de aici că limita $\varphi(t)$ a şirului de funcţii caracteristice $(\varphi_n(t))_{n\in N^*}$ este continuă pentru orice $t \in R$ dacă ea este continuă în $t = 0$.

Să se arate că este esenţial ca limita $\varphi(t)$ să fie continuă în $t = 0$.

SOLUȚIE. Într-adevăr teorema de mai înainte poate să nu fie adevărată dacă neglijăm această condiție.

Fie pentru aceasta următorul exemplu

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant -n, \\ \dfrac{x+n}{2n} & \text{dacă } -n < x < n, \\ 1 & \text{dacă } x \geqslant n. \end{cases}$$

Densitatea de repartiție corespunzătoare este

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{dacă } x \in (-n, n), \\ 0 & \text{dacă } x \notin (-n, n). \end{cases}$$

De aici urmează că șirul funcțiilor caracteristice este dat de

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} e^{itx}\,dx = \frac{\sin nt}{nt}.$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } t = 0, \\ 0 & \text{dacă } t \neq 0. \end{cases}$$

Se vede că funcția limită $\varphi(t)$ nu este continuă în punctul $t = 0$. Corespunzător acestui fapt avem pentru orice x fixat

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{2}, \text{ adică limita șirului } (F_n(x))_{n\in N^*}$$

nu este o funcție de repartiție.

4. *Să se arate că șirul funcțiilor de repartiție* $(F_n)_{n\in N^*}$ *corespunzător șirului de funcții caracteristice* $(\varphi_n)_{n\in N^*}$ *date prin relațiile*

$$\varphi_n(t) = e^{int}, \quad n \in N^*$$

nu converge către o funcție de repartiție.

SOLUȚIE. Se vede că șirul $(\varphi_n)_{n\in N^*}$ nu converge, afară doar de $t = 2k\pi$. Nefiind îndeplinite condițiile teoremei referitoare la șirul de funcții caracteristice și șirul de funcții de repartiție, rezultă că $(F_n)_{n\in N^*}$ nu converge către o funcție de repartiție.

Acest lucru se observă și direct, și anume

$$\varphi_n(t) = e^{int}, \quad n \in N^*$$

reprezintă funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ_n, $n \in N^*$ cu masa concentrată în punctul n.

Deci

$$F_n(x) = P(\omega : \xi_n(\omega) \leqslant x) = \varepsilon(x - n) = \begin{cases} 0 & x < n, \\ 1 & x \geqslant n. \end{cases}$$

Sub această formă se vede că

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = 0 \quad \text{pentru orice } x \text{ fixat.}$$

5. *Să se arate că dacă un şir de variabile aleatoare converge în probabilitate, nu rezultă că şirul dat converge aproape sigur.*

SOLUŢIE. Să considerăm cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ unde $\Omega = [0, 1)$, $K = B_{[0,1)}$, P măsura Lebesgue pe dreaptă. Pentru fiecare număr natural m, să considerăm variabilele aleatoare $\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_m^{(m)}$ definite astfel:

$$\xi_j^{(m)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \omega \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right), \\ 0 & \text{dacă } \omega \notin \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right), \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Să punem $\xi_1^{(1)}(\omega) \equiv 1$, $\omega \in [0, 1)$ şi să considerăm următorul şir de variabile aleatoare:

$$\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \xi_3^{(3)}, \ldots, \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}, \ldots$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem

$$P\left(\omega : |\xi_k^{(n)}(\omega)| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\omega \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}.$$

Dacă $n > N(\varepsilon, \eta)$ atunci

$$P(\omega : |\xi_k^{(n)}(\omega)| \geqslant \varepsilon) < \eta$$

şi deci şirul de variabile aleatoare considerat converge în probabilitate către zero.

Se vede însă imediat că şirul de mai înainte nu converge aproape sigur către zero.

Într-adevăr dacă $\omega_0 \in [0, 1)$, atunci pentru orice m există un j astfel încît $\omega_0 \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right)$ şi deci $\xi_j^{(m)}(\omega_0) = 1$ şi de aici rezultă că în şirul

$$\xi_1^{(1)}(\omega_0), \xi_1^{(2)}(\omega_0), \xi_2^{(2)}(\omega_0), \xi_1^{(3)}(\omega_0), \xi_2^{(3)}(\omega_0), \xi_3^{(3)}(\omega_0), \ldots$$

oricare ar fi rangul termenului din şir găsim după el termeni ai şirului egali cu 1, care demonstrează afirmaţia.

6. *Dacă ξ și η sînt două variabile aleatoare și $b \geqslant 0$, atunci*

$$P(\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a - b) - P(\omega : |\eta(\omega)| > b) \leqslant$$
$$\leqslant P(\omega : \xi(\omega) \leqslant a) \leqslant P(\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a + b) + P(\omega : |\eta(\omega)| > b).$$

SOLUȚIE. Pentru prima parte a inegalității de mai înainte pornim de la incluziunea:

$$\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a - b\} = [\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a - b\} \cap$$
$$\cap \{\omega : |\eta(\omega)| \leqslant b\}] \cup [\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a - b\} \cap \{\omega : |\eta(\omega)| > b\}] \subseteq$$
$$\subseteq [\{\omega : \xi(\omega) \leqslant a - b - \eta(\omega)\} \cap \{\omega : -b \leqslant \eta(\omega) \leqslant b\}] \cup \{\omega : |\eta(\omega)| > b\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\omega : \xi(\omega) \leqslant a\} \cup \{\omega : |\eta(\omega)| > b\}.$$

Luînd probabilitatea obținem

$$P(\omega : \xi(\varphi) + \eta(\omega) \leqslant a - b) \leqslant P(\omega : \xi(\omega) \leqslant a) + P(\omega : |\eta(\omega)| > b)$$

din care rezultă imediat prima parte a inegalității.

Pentru partea a doua a inegalității, pornim de la incluziunea

$$\{\omega : \xi(\omega) \leqslant a\} = [\{\omega : \xi(\omega) \leqslant a\} \cap \{\omega : |\eta(\omega)| \leqslant b\}] \cup$$
$$\cup [\{\omega : \xi(\omega) \leqslant a\} \cap \{\omega : |\eta(\omega)| > b\}] \subseteq$$
$$\subseteq \{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a + b\} \cup \{\omega : |\eta(\omega)| > b\}.$$

Luînd probabilitatea acestei incluziuni, obținem imediat

$$P(\omega : \xi(\omega) \leqslant a) \leqslant P(\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) \leqslant a + b) + P(\omega : |\eta(\omega)| > b)$$

adică tocmai partea a doua a inegalității.

7. *Se știe că întotdeauna convergența în medie de ordinul r implică convergența în probabilitate. Să se arate că proprietatea inversă nu are întotdeauna loc.*

SOLUȚIE. Vom arăta pe un exemplu că proprietatea inversă nu este totdeauna adevărată. Să considerăm șirul de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ unde fiecare ξ_n poate lua numai valorile 0, $-n$, n cu probabilitățile

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(\xi_n = -n) = P(\xi_n = n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$, există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel încît

$$P(|\xi_n| > \varepsilon) = \frac{1}{2n^2} < \eta \text{ îndată ce } n > N(\varepsilon, \eta),$$

ceea ce arată că șirul $(\xi_n)_{n \in N^*}$ converge în probabilitate către zero.

Dacă acum considerăm

$$M(|\xi_n - 0|^2) = M(\xi_n^2) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2 \frac{1}{2n^2} + n^2 \frac{1}{2n^2} = 1$$

vedem că şirul $(\xi_n)_{n\in N^*}$ nu converge în medie de ordinul al doilea către zero, care dovedeşte ceea ce ne-am propus să arătăm.

8. *Fie $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare, $(F_n)_{n\in N^*}$ şirul funcţiilor de repartiţie corespunzătoare şi $(\eta_n)_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare care tinde în probabilitate către constanta c. Să presupunem că şirul $(F_n)_{n\in N^*}$ converge către o funcţie de repartiţie $F(x)$ continuă.*

Să se arate că:

a) *şirul funcţiilor de repartiţie corespunzătoare şirului $(\xi_n+\eta_n)_{n\in N^*}$ tinde către $F(x-c)$;*

b) şirul funcţiilor de repartiţie corespunzătoare şirului $(\xi_n\eta_n)_{n\in N^*}$, tinde către $F\left(\frac{x}{c}\right)$ (dacă $c>0$);

c) *şirul funcţiilor de repartiţie corespunzătoare şirului $\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)_{n\in N^*}$, $\eta_n\neq 0$, tinde către $F(cx)$* (dacă $c>0$).

SOLUŢIE. Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Atunci putem scrie imediat incluziunea

$$\{\omega:\xi_n(\omega)+\eta_n(\omega)<x\}=(\{\omega:\xi_n(\omega)+\eta_n(\omega)<x\}\cap$$
$$\cap\{\omega:|\eta_n(\omega)-c|<\varepsilon\})\cup(\{\omega:\xi_n(\omega)+\eta_n(\omega)<x\}\cap$$
$$\cap\{\omega:|\eta_n(\omega)-c|\geqslant\varepsilon\})\subset\{\omega:|\eta_n(\omega)-c|\geqslant\varepsilon\}\cup$$
$$\cup\{\omega:\xi_n(\omega)<x-c+\varepsilon\}.$$

Luînd probabilitatea acestei incluziuni obţinem

$$P(\omega:\xi_n(\omega)+\eta_n(\omega)<x)\leqslant P(\omega:|\eta_n(\omega)-c|\geqslant\varepsilon)+$$
$$+P(\omega:\eta_n(\omega)<x-c+\varepsilon)$$

valabilă pentru orice $n\in N$.

Dacă luăm acum limita superioară obţinem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\omega:\xi_n(\omega)+\eta_n(\omega)<x)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\omega:|\eta_n(\omega)-c|\geqslant\varepsilon)+$$
$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\omega:\xi_n(\omega)<x-c+\varepsilon)=F(x-c+\varepsilon)$$

deoarece

$$\eta_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}c,$$

iar

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}P(\omega:\xi_n(\omega)<x-c+\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}P(\omega:\xi_n(\omega)<x-c+\varepsilon)=$$
$$=F(x-c+\varepsilon)$$

Pornind acum de la incluziunea

$$\{\omega : \xi_n(\omega) < x - c - \varepsilon\} = (\{\omega : \xi_n(\omega) < x - c - \varepsilon\} \cap$$
$$\cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| < \varepsilon\}) \cup (\{\omega : \xi_n(\omega) < x - c - \varepsilon\} \cap$$
$$\cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| \geqslant \varepsilon\}) \subset \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| \geqslant \varepsilon\} \cup$$
$$\cup \{\omega : \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) < x\}$$

și luînd probabilitatea, obținem

$$P(\omega : \xi_n(\omega) < x - c - \varepsilon) \leqslant P(\omega : |\eta_n(\omega) - c| \geqslant \varepsilon) +$$
$$+ P(\omega : \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) < x)$$

adevărată pentru orice $n \in N^*$.

Trecînd la limita inferioară și ținînd cont de ipotezele din enunț găsim :

$$F(x - c - \varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) < x),$$

de unde

$$F(x - c - \varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) < x) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) < x) \leqslant F(x - c + \varepsilon).$$

Cum ε este arbitrar și F este continuă, avem că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega) + \eta_n(\omega) < x) = F(x - c).$$

b) Să pornim tot de la o incluziune între mulțimi, și anume

$$\{\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x\} = (\{\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x\} \cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon\}) \cup$$
$$\cup (\{\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x\} \cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| \leqslant \varepsilon\}) \subset$$
$$\subset \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon\} \cup \left\{\omega : \xi_n(\omega) < \frac{x}{c - \varepsilon}\right\}$$

cu $c > 0$ și $0 < \varepsilon < c$.

Luînd probabilitatea acestei incluziuni și trecînd la limita superioară, avem

$$\varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P\left(\omega : \xi_n(\omega) < \frac{x}{c - \varepsilon}\right) +$$
$$+ \varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon)$$

de unde pe baza ipotezelor din enunț avem imediat că

$$\varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x) \leqslant F\left(\frac{x}{c - \varepsilon}\right).$$

Analog se arată că

$$F\left(\frac{x}{c+\varepsilon}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x)$$

şi deci avem inegalităţile

$$F\left(\frac{x}{c+\varepsilon}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x) \leqslant F\left(\frac{x}{c-\varepsilon}\right).$$

Cum F este continuă rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega) < x) = F\left(\frac{x}{c}\right).$$

c) Să scriem următoarea incluziune

$$\left\{\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right\} = \left(\left\{\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right\} \cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| \leqslant \varepsilon\}\right) \cup$$

$$\cup \left(\left\{\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right\} \cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon\}\right) \subset$$

$$\subset \{\omega : \xi_n(\omega) < x(c+\varepsilon)\} \cup \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon\}.$$

Luînd probabilitatea şi trecînd la limita superioară în inegalitatea obţinută, avem

$$\varlimsup_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n(\omega) < x(c+\varepsilon)) +$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} P(\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon) = F(x(c+\varepsilon))$$

dacă folosim condiţiile din enunţ.

În mod analog, avem

$$\{\omega : \xi_n(\omega) < x(c-\varepsilon)\} = (\{\omega : \xi_n(\omega) < x(c-\varepsilon)\} \cap$$

$$\cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| \leqslant \varepsilon\}) \cup (\{\omega : \xi_n(\omega) < x(c-\varepsilon)\} \cap$$

$$\cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| > \varepsilon\}) \subset \left\{\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right\} \cup \{\omega : |\eta_n(\omega) - c| < \varepsilon\},$$

de unde obţinem dacă luăm probabilitatea şi apoi trecem la limita inferioară că

$$F(x(c-\varepsilon)) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right)$$

cu $c > 0$ şi $0 < \varepsilon < c$.

Așadar am găsit că

$$F(x(c-\varepsilon)) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right) \leqslant F(x(c+\varepsilon))$$

unde $0 < \varepsilon < c$.

Cum F este continuă, am obținut deci că

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega)}{\eta_n(\omega)} < x\right) = F(cx),\ c > 0.$$

Observație. Din rezultatul obținut se poate deduce ușor că dacă $(\xi_n^{(j)})_{n\in N^*}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ sînt m șiruri de variabile aleatoare și $\xi_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} c^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $c^{(j)}$ constante, atunci orice funcție rațională $R(\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ converge în probabilitate către constanta $R(c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(m)})$ și analog pentru orice putere $R^k(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ cu $k > 0$.

9. *Dacă $(\xi_n)_{n\in N^*}$ este un șir de variabile aleatoare avînd o repartiție limită, $(\eta_n)_{n\in N^*}$ și $(\zeta_n)_{n\in N^*}$ două șiruri de variabile aleatoare astfel, încît*

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1 \text{ și } \zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

atunci șirul $(\xi_n\eta_n + \zeta_n)_{n\in N^*}$ are aceeași repartiție limită ca și șirul $(\xi_n)_{n\in N^*}$.

Soluție. Din exercițiul precedent punctul (b) rezultă mai întîi că șirul $(\xi_n\eta_n)_{n\in N^*}$ are repartiția limită $F(x)$ căci $c = 1$ în acest caz.

Aplicînd acum din nou exercițiul precedent punctul (a) pentru șirurile $\nu_n = \xi_n\eta_n$ și ζ_n; $n = 1, 2, \ldots$ rezultă afirmația făcută.

10. *Dacă funcțiile de repartiție corespunzătoare șirului de variabile $(\xi_n)_{n\in N^*}$ tind către o repartiție limită, și dacă șirul $(\eta_n)_{n\in N^*}$ converge în probabilitate către zero atunci șirul $(\xi_n\eta_n)_{n\in N^*}$ converge în probabilitate către zero.*

Soluție. Fie $a \in R$ și $a > 0$. Atunci avem satisfăcută incluziunea

$$\{\omega : |\xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega)| > \varepsilon\} \subset \{\omega : |\xi_n(\omega)| > a\} \cup \left\{\omega : |\eta_n(\omega)| > \frac{\varepsilon}{a}\right\}.$$

Luînd probabilitatea acestei incluziuni, vom obține șirul de inegalități

$$P(\omega : |\xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega)| > \varepsilon) \leqslant P(\omega : |\xi_n(\omega)| > a) + P\left(\omega : |\eta_n(\omega)| > \frac{\varepsilon}{a}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P(\omega : \xi_n(\omega) < -a) + 1 - P(\omega : \xi_n(\omega) \leqslant a) + P\left(\omega : |\eta_n(\omega)| > \frac{\varepsilon}{a}\right) \leqslant$$

$$\leqslant F_n(-a) + 1 - F_n(a) + P\left(\omega : |\eta_n(\omega)| > \frac{\varepsilon}{a}\right).$$

Dacă a este luat astfel ca $-a$ şi a să fie puncte de continuitate pentru funcţia de repartiţie limită F, atunci din ipotezele în care lucrăm obţinem

$$\limsup_{n\to\infty} P(\omega : |\xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega)| > \varepsilon) \leqslant F(-a) + 1 - F(a).$$

Să alegem pe a astfel încît $-a$ şi a să fie puncte de continuitate pentru F şi în plus să avem

$$F(-a) < \frac{\delta}{2} \text{ şi } 1 - F(a) < \frac{\delta}{2} \text{ cu } \delta > 0.$$

Atunci

$$\limsup_{n\to\infty} P(\omega : |\xi_n(\omega)\,\eta_n(\omega)| > \varepsilon) \leqslant \delta.$$

Cum δ este arbitrar rezultă deci că

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

11. *Se dau două şiruri de variabile aleatoare: şirul* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *convergent în probabilitate către* a, *şi şirul* $(\eta_n)_{n\in N^*}$ *convergent către* $b > 0$.

Să se arate că dacă $\eta_n > 0$ *şi* $\left|\frac{\xi_n}{\eta_n}\right| \leqslant c$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\xi_n}{\eta_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

SOLUŢIE. Să introducem următoarele evenimente

$$A_{n,\varepsilon} = \{\omega : |\xi_n(\omega) - a| > \varepsilon\} \text{ şi } B_{n,\varepsilon} = \{\omega : |\eta_n(\omega) - b| > \varepsilon\}$$

şi

$$C_{n,\varepsilon} = A_{n,\varepsilon} \cup B_{n,\varepsilon}.$$

Folosind formula care ne dă valoarea medie în funcţie de mediile condiţionate, obţinem

$$M\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n} - \frac{a}{b}\right|\right) = P(C_{n,\varepsilon})\, M_{C_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n} - \frac{a}{b}\right|\right) + P(C^c_{n,\varepsilon})\, M_{C^c_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n} - \frac{a}{b}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant [P(A_{n,\varepsilon}) + P(B_{n,\varepsilon})]\left(c + \frac{|a|}{b}\right) + M_{C^c_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n} - \frac{a}{b}\right|\right).$$

Să luăm $0 < \varepsilon < \frac{b}{2}$. Dacă

$$|\xi(\omega) - a| \leqslant \varepsilon \quad \text{şi} \quad |\eta_n(\omega) - b| \leqslant \varepsilon$$

atunci

$$M_{C^c_{n,\varepsilon}}\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n} - \frac{a}{b}\right|\right) \leqslant \frac{2\varepsilon(|a| + b)}{b^2}.$$

și deci

$$M\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n}-\frac{a}{b}\right|\right)\leqslant [P(A_{n,\varepsilon})+P(B_{n,\varepsilon})]\left(c+\frac{|a|}{b}\right)+\frac{2\varepsilon(|a|+b)}{b^2}.$$

Făcînd acum pe $n\to\infty$ și ținînd cont de ipotezele în care lucrăm, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n}-\frac{a}{b}\right|\right)=0$$

adică afirmația făcută.

Observație. Dacă $(\xi_n)_{n\in N^*}$ este un șir convergent în probabilitate către a, și dacă $|\xi_n|\leqslant c$, $n=1, 2, 3, \ldots$, atunci $\lim M(\xi_n)=a$.

Într-adevăr, această afirmație este un caz particular al celei demonstrate, în care luăm $\eta_n\equiv 1$; $n=1, 2, 3, \ldots$

Așadar dacă avem un șir de variabile aleatoare convergent în probabilitate către o constantă iar șirul dat este uniform mărginit de o altă constantă, atunci convergența în medie de ordinul întîi este echivalentă cu convergența în probabilitate.

12. *Fie $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare independente care au repartiție exponențială iar $M(\xi_k)=ck^\alpha$, unde $c>0$ și $0<\alpha<\frac{1}{2}$.*

Să se arate că șirul $\left(\eta_n-\frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right)_{n\in N^*}$ unde $\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ converge în probabilitate către zero.

Soluție. Fie $\nu_n=\eta_n-\frac{cn^\alpha}{\alpha+1}$. Atunci avem că

$$M(\nu_n)=M(\eta_n)-\frac{cn^\alpha}{\alpha+1}=\frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha-\frac{cn^\alpha}{\alpha+1}=c\frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha-\frac{n}{\alpha+1}\right).$$

Știind că ξ_k are repartiție exponențială cu media ck^α, rezultă că densitatea de repartiție a variabilei aleatoare ξ_k este

$$\rho_{\xi_k}(x)=\begin{cases}0 & \text{dacă } x\leqslant 0,\\ \frac{1}{ck^\alpha}e^{-\frac{x}{ck^\alpha}} & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

De aici deducem imediat printr-un simplu calcul că

$$M(\xi_k^n)=2c^2k^{2\alpha};\quad D^2(\xi_k)=c^2k^{2\alpha}.$$

Urmează acum că

$$D^2(\nu_n)=D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D^2(\xi_k)=\frac{c^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}.$$

Știind că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha+1}$$

și că $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\nu_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = c^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-2\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = 0.$$

Avînd îndeplinite apoi inegalitățile

$$P(\omega : |\nu_n(\omega)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(\omega : |\nu_n(\omega) - M(\nu_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant 4\,\frac{D^2(\nu_n)}{\varepsilon^2}$$

deducem că șirul $(\nu_n)_{n\in N^*}$ converge în probabilitatea către zero.

13. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un șir de variabile aleatoare pozitive cu densitățile de repartiție date de*

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}\,e^{-x}}{(n-1)!} & x > 0, \\ 0. & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Să se arate că șirul $\left(\dfrac{\xi_n - M(\xi_n)}{\sqrt{D^2(\xi_n)}}\right)_{n\in N^*}$ *urmează la limită o lege normală* $N(.\,;\,0,\,1)$.

SOLUȚIE. Să calculăm mai întîi valoarea medie $M(\xi_n)$ și dispersia $D^2(\xi_n)$. Avem

$$M(\xi_n) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(n-1)!} = n,$$

$$M(\xi_n^2) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n+1}\,e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+2)}{(n-1)!} = n(n+1).$$

Deci

$$D^2(\xi_n) = M(\xi_n^2) - (M(\xi_n))^2 = n(n+1) - n^2 = n.$$

Așadar trebuie să calculăm legea limită a variabilei aleatoare

$$\eta_n = \frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\xi_n - \sqrt{n}.$$

Dacă notăm cu $\varphi_n(t)$ funcția caracteristică a variabilei aleatoare η_n și reușim să arătăm că $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, demonstrația s-a terminat, căci folosim teoremele ce leagă între ele șirurile de funcții de repartiție și cele caracteristice, corespunzătoare unui șir de variabile aleatoare.

Conform definiției, avem

$$\varphi_n(t) = \int_0^\infty e^{it\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)} \rho_n(x)\mathrm{d}x = e^{-it\sqrt{n}} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)x}\,\mathrm{d}x.$$

Integrînd prin părți de $n-1$ ori sau folosind funcția $\Gamma(.)$, găsim

$$\varphi_n(t) = e^{-it\sqrt{n}} \left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{-n+1}$$

și

$$\ln \varphi_n(t) = -it\sqrt{n} - (n-1)\ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right) = -it\sqrt{n} +$$

$$+ (n-1)\left(\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \theta(n)\right) = -\frac{t^2}{2} + \theta'(n)$$

dacă

$$\left|\frac{t}{\sqrt{n}}\right| < 1.$$

Cum însă $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2}$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ și deci

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \frac{\xi_n(\omega) - M(\xi_n)}{\sqrt{D^2(\xi_n)}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

14. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un șir de variabile aleatoare independente, pentru care*

$$P(\xi_n = 3^{n-1}) = P(\xi_n = -3^{n-1}) = \frac{1}{2},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dacă notăm cu $\eta_n = \frac{1}{S_n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, *unde* $S_n^2 = D^2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right)$, *să se arate că* η_n *nu converge în probabilitate către zero.*

SOLUȚIE. Se vede că avem $|\xi_n| = 3^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Cum avem șirul de inegalități

$$|\xi_n| = |\xi_n + \xi_{n-1} - \xi_{n-1}| \leqslant |\xi_n + \xi_{n-1}| + |\xi_{n-1}| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_n + \xi_{n-1} + \ldots + \xi_1| + |\xi_{n-1}| + \ldots + |\xi_1|$$

urmează că

$$|\eta_n| \geqslant \frac{|\xi_n| - |\xi_1| - |\xi_2| - \ldots - |\xi_{n-1}|}{S_n}.$$

Variabilele șirului dat fiind independente putem calcula

$$D^2\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} 3^{2(k-1)} = \frac{3^{2n}-1}{3^2-1} = \frac{9^n-1}{8},$$

întrucît

$$M(\xi_k) = 0 \text{ şi } M(\xi_k^2) = 3^{2(k-1)}.$$

Deci

$$S_n = \sqrt{\frac{9^n - 1}{8}}.$$

Prin urmare

$$|\eta_n| \geqslant \frac{3^{n-1} - (1 + 3 + \ldots + 3^{n-2})}{\sqrt{\frac{9^n - 1}{8}}} > \frac{\sqrt{2}}{3},$$

de unde putem scrie

$$P\left(\omega : |\eta_n(\omega)| > \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 1.$$

În concluzie

$$P(\omega : |\eta_n(\omega)| > \varepsilon) \not\to 0 \text{ dacă } \varepsilon \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3},$$

adică şirul $(\eta_n)_{n \in N^*}$ nu converge în probabilitate către zero.

15. *Să considerăm urnele*:

$$U_1(a_1, b_1),\ U_2(a_2, b_2),\ \ldots,\ U_m(a_m, b_m);$$

fiecare urnă $U_k(a_k, b_k)$ *avînd* a_k *bile albe şi* b_k *bile negre cu* $a_1 = 0$; $b_m = 0$; $a_k \neq 0$, $2 \leqslant k \leqslant m$; $b_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$. *Din aceste urne se fac extracţii după legea următoare: dacă a r-a extracţie s-a făcut din urna* U_k *şi s-a obţinut bila albă, extracţia de ordinul* $r+1$ *va fi efectuată din urna* U_{k-1}, *iar dacă s-a obţinut o bilă neagră, extracţia de ordinul* $r+1$ *se va efectua din urna* U_{k+1}. *Notînd cu* $P_k(n)$ *probabilitatea de a extrage o bilă albă în a n-a extracţie ştiind că am început extracţiile cu o bilă albă din urna* U_k, *să se arate că*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P_k(j) = \frac{1}{2}.$$

SOLUŢIE. Să notăm cu p_k probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_k şi cu q_k probabilitatea de a extrage o bilă neagră din urna U_k.

Avem

$$p_1 = 0,\ p_k = \frac{a_k}{a_k + b_k} \neq 0,\ 2 \leqslant k \leqslant m - 1,\ p_m = 1.$$

$$q_1 = 1,\ q_k = \frac{b_k}{a_k + b_k} \neq 0,\ 2 \leqslant k \leqslant m - 1,\ q_m = 0.$$

Să notăm cu ξ_n numărul bilelor albe ieşite în a n-a extracţie ($\xi_n = 0$ sau 1) şi cu $P_k(n, m)$ probabilitatea de a extrage m bile albe în n extracţii prima fiind făcută din urna U_k. Între probabilităţile introduse

avem relațiile:

$$P_1(n) = P_2(n-1),$$

$$P_k(n) = p_k P_{k-1}(n-1) + q_k P_{k+1}(m-1), \qquad 2 \leqslant k \leqslant m-1$$

și

$$P_m(n) = P_{m-1}(n-1).$$

Pentru probabilitățile $P_k(n, m)$ avem relațiile

$$P_k(n, m) = p_k P_{k-1}(n-1,\ m-1) + q_k P_{k+1}(n-1,\ m). \tag{1}$$

Variabila aleatoare $\sum_{j=1}^{n} \xi_j$ ia valoarea m cu probabilitatea $P_k(n, m)$. Atunci valoarea medie a numărului de bile albe în n extracții este

$$M_k(n) = \sum_{m=0}^{n} m P_k(n, m).$$

Dacă înmulțim cu m relația (1) apoi sumăm de la zero la n obținem

$$M_k(n) = \sum_{m=0}^{n} m P_k(n, m) = p_k \sum_{m=0}^{n} m\, P_{k-1}(n-1,\ m-1) +$$

$$+ q_k \sum_{m=0}^{n} P_{k+1}(n-1,\ m) = p_k \sum_{m=0}^{n-1} m P_{k-1}(n-1,\ m) +$$

$$+ q_k \sum_{m=0}^{n-1} P_{k+1}(n-1,\ m) + p_k \sum_{m=0}^{n-1} P_{k-1}(n-1,\ m)$$

sau

$$M_k(n) = p_k M_{k-1}(n-1) + q_k M_{k+1}(n-1) + p_k. \tag{2}$$

Soluția acestui sistem este de forma

$$M_k(n) = \theta n + \beta_k,$$

unde β_k verifică sistemul dedus din (2)

$$p_k \beta_{k-1} + q_k \beta_{k+1} - \beta_k = \theta - p_k.$$

Însă $p_k + q_k = 1$, și deci putem să scriem sistemul astfel:

$$p_k(\beta_{k-1} - \beta_k) - q_k(\beta_k - \beta_{k+1}) = \theta - p_k. \tag{3}$$

Să notăm acum cu $y_{k-1} = \beta_{k-1} - \beta_k$ și să punem $q_k = t_k p_k$. Sistemul va deveni în acest caz

$$\left.\begin{aligned} &y_{k-1} - t_k y_k = \frac{\theta}{p_k} - 1; \quad k = 2, \ldots, m-1, \\ &y_1 = -\theta, \quad y_m = \theta - 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Din $p_k + q_k = 1$ şi $q_k = t_k p_k$ rezultă

$$\frac{1}{p_k} = 1 + t_k.$$

Cu aceasta, sistemul (4) devine

$$\begin{aligned} y_1 &= -\theta, \\ y_1 &= t_2 y_2 + \theta t_2 + \theta - 1, \\ y_2 &= t_3 y_3 + \theta t_3 + \theta - 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1} &= (2\theta - 1)\, t_m + \theta - 1 \end{aligned}$$

sau încă

$$\begin{aligned} -\theta &= y_1, \\ y_1 &= t_2 y_2 + t_2\theta + \theta - 1, \\ t_2 y_2 &= t_2 t_3 y_3 + t_2 t_3 \theta + t_2 (\theta - 1), \\ t_2 t_3 y_3 &= t_2 t_3 t_4 y_4 + t_2 t_3 t_4 \theta + t_2 t_3 (\theta - 1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_2 t_3 \ldots t_{m-1} y_{m-1} &= t_2 t_3 \ldots t_m (2\theta - 1) + t_2 t_3 \ldots t_{m-1} (\theta - 1). \end{aligned}$$

Prin adunarea acestor relaţii obţinem

$$\begin{aligned} -\theta &= (2\theta - 1)\, t_2 t_3 \ldots t_m + \theta\,(t_2 + t_2 t_3 + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_{m-1}) + \\ &+ (\theta - 1)\,[1 + t_2 + t_2 t_3 + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_{m-1}] = \\ &= \theta - 1 + (t_2 + t_2 t_3 + t_2 t_3 t_1 + \ldots + t_2 t_3 \ldots t_m)\,(2\theta - 1). \end{aligned}$$

Întrucît $t_k > 0$, $2 \leqslant k \leqslant m$, urmează $\theta = \frac{1}{2}$.

Dar $P_k(n) = M_k(\xi_n)$

şi deci

$$M_k(n) = M_k\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} M_k(\xi_j) = \sum_{j=1}^{n} P_k(j).$$

Urmează atunci că

$$\sum_{j=1}^{n} P_k(j) = \frac{1}{2}\, n + \beta_k.$$

Avem deci rezultatul amintit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P_k(j) = \frac{1}{2}.$$

16. *Pe mulțimea $\mathcal{V}$ a variabilelor aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ se consideră funcționala*

$$f(\xi) = M\left(\frac{|\xi|}{1+|\xi|}\right) = \int_\Omega \frac{|\xi(\omega)|}{1+|\xi(\omega)|}\,dP(\omega).$$

a) *Să se arate că $d(\xi, \eta) = f(\xi - \eta)$ este o semimetrică pe $\mathcal{V}$ (adică spațiul $\mathcal{V}$ este un spațiu semimetric).*

b) *Dacă notăm cu V spațiul claselor de echivalență ale variabilelor aleatoare din $\mathcal{V}$, atunci $d(.,.)$ definită mai înainte este o metrică în V. Să se arate că topologia spațiului metric (V, d) este aceea de convergență în probabilitate, adică $d(\xi_n, \xi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ dacă și numai dacă $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.*

SOLUȚIE. a) Trebuie să arătăm că $d(\xi, \eta) = f(\xi - \eta)$ verifică următoarele proprietăți:

$$\text{i)}\ d(\xi, \eta) \geqslant 0,$$

$$\text{ii)}\ d(\xi, \eta) = d(\eta, \xi),$$

$$\text{iii)}\ d(\xi, \zeta) \leqslant d(\xi, \eta) + d(\eta, \zeta).$$

(și ii) rezultă imediat din faptul că

$$d(\xi, \eta) = \int_\Omega \frac{|\xi(\omega) - \eta(\omega)|}{1+|\xi(\omega) - \eta(\omega)|}\,dP(\omega).$$

Pentru a dovedi iii) considerăm funcția

$$h : [0, \infty) \to [0, 1)$$

definită prin relația

$$h(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{t}{1+t}.$$

Se vede imediat că $h(t)$ este o funcție crescătoare pentru $t \geqslant 0$. Din

$$\frac{|t+\tau|}{1+|t+\tau|} \leqslant \frac{|t|+|\tau|}{1+|t|+|\tau|} \leqslant \frac{|t|}{1+|t|+|\tau|} + \frac{|\tau|}{1+|t|+|\tau|} \leqslant \frac{|t|}{1+|t|} + \frac{|\tau|}{1+|\tau|}.$$

Din această inegalitate rezultă acum imediat inegalitatea iii).

b) În $\mathcal{V}$ determinăm clasele de echivalență prin $\xi \sim \eta$ dacă și numai dacă $P(\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)) = 0$, adică identificăm variabilele aleatoare ce diferă pe o mulțime de probabilitate nulă.

Pentru ușurință în loc de clasa variabilei aleatoare ξ vom folosi chiar variabila aleatoare ξ, adică un reprezentant al clasei.

Atunci $d(\xi, \eta) = 0$ dacă și numai dacă $\xi = \eta$ și $d(.,.)$ devine o metrică pe V.

Să arătăm acum că $d(\xi_n, \xi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ dacă şi numai dacă $\xi_n \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi$.

Într-adevăr, dacă $d(\xi_n, \xi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ şi notînd prin

$$A_n(\delta) = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \delta\}$$

avem

$$d(\xi_n, \xi) = \int_\Omega \frac{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|}{1 + |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|} dP(\omega) =$$

$$= \int_{A_n(\delta)} \frac{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|}{1 + |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|} dP(\omega) + \int_{A_n^c(\delta)} \frac{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|}{1 + |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|} dP(\omega) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta}{1+\delta} \int_{A_n(\delta)} dP(\omega) = \frac{\delta}{1+\delta} P(A_n(\delta)) \text{ cu } \delta > 0.$$

Cum $d(\xi_n, \xi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ rezultă că pentru orice $\delta > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n(\delta)) = 0$, deci că $\xi_n \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi$.

Reciproc, putem să scriem inegalitatea

$$d(\xi_n, \xi) = \int_{A_n(\delta)} \frac{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|}{1 + |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|} dP(\omega) + \int_{A_n^c(\delta)} \frac{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|}{1 + |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|} dP(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{A_n(\delta)} dP(\omega) + \frac{\delta}{1+\delta} \int_{A_n^c(\delta)} dP(\omega) \leqslant P(A_n(\delta)) + \frac{\delta}{1+\delta}.$$

Însă $\delta > 0$ arbitrar, pot să-l aleg astfel ca $\frac{\delta}{1+\delta} < \varepsilon$.

Cum $\xi_n \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} \xi$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ putem determina $N(\varepsilon, \delta)$ astfel încît $P(A_n(\delta)) < \varepsilon$ dacă $n > N(\varepsilon, \delta)$, deci că $d(\xi_n, \xi) < 2\varepsilon$ îndată ce $n > N(\varepsilon, \delta)$ şi prin urmare $d(\xi_n, \xi) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Pentru a dovedi că spaţiul metric (V, d) este complet, folosim criteriul lui Sluţki care spune că un şir de variabile aleatoare este convergent în probabilitate atunci şi numai atunci cînd este şir Cauchy în probabilitate. Cum convergenţa în $d(\ldots)$ este echivalentă cu cea în probabilitate rezultă că (V, d) este un spaţiu metric complet.

17. *Să se arate că nu se poate defini o normă cu ajutorul convergenţei în probabilitate.*

SOLUŢIE. Dacă convergenţa în probabilitate ar fi compatibilă cu existenţa unei norme, ar rezulta de aici că dacă un şir de variabile aleatoare ar tinde la zero în probabilitate, el va fi convergent către zero în sensul lui Cezaro.

Într-adevăr,. aplicînd proprietățile normei avem

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right\| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|$$

care tinde la zero dacă $\|\xi_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ și deci $\xi_n \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0$, în ipoteza că s-a definit o normă compatibilă cu acest mod de convergență.

Arătăm însă că se poate construi un șir $(\xi_n)_{n\in N^*}$, convergent în probabilitate către zero și care nu tinde către zero în sensul lui Cesaro în probabilitate.

Fie pentru aceasta $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ variabile aleatoare independente și pozitive cu funcțiile de repartiție date de

$$F_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+n} & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

și deci $\xi_n \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0$.

Să arătăm însă că $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\nrightarrow}} 0$.

Într-adevăr $(\xi_n)_{n\in N^*}$, fiind un șir de variabile aleatoare pozitive, să notăm cu $\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Avem

$$\frac{\eta_n}{n} \leqslant \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

și de aici urmează că

$$\frac{\eta_n}{n} \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0 \quad \text{dacă} \quad \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \overset{P}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0.$$

Însă acest lucru nu se întîmplă în cazul nostru căci

$$F_{\eta_n}(x) = P(\eta_n < x) = P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < x, \ldots, \xi_n < x) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j < x) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{x+j}\right) & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Avem

$$P\left(\frac{\eta_n}{n} < \varepsilon\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n\varepsilon + j}\right) < \left(1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}\right)^n$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\eta_n}{n} < \varepsilon\right) \leqslant e^{-(1+\varepsilon)} \neq 1.$$

De aici urmează că convergenţa în probabilitate nu este compatibilă cu existenţa unei norme.

Definiţie. Fie $\{\Omega, K, P\}$ un cîmp de probabilitate complet aditiv. Un şir de evenimente $(A_n)_{0\leqslant n<\infty} \subset K$ se va numi „tare amestecat"*) cu densitatea α $(0 < \alpha < 1)$, dacă pentru orice $B \in K$, $P(B) > 0$ avem (α independent de B).

$$\lim_{n\to\infty} P_B(A_n) = \alpha.$$

18. *Fie $\{\Omega, K, P\}$ un cîmp de probabilitate complet aditiv, şi $(A_n)_{0\leqslant n<\infty}$ un şir de evenimente astfel ca $A_0 = \Omega$ iar $P(A_n) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Şirul $(A_n)_{0\leqslant n<\infty}$ este tare amestecat cu densitatea α $(0 < \alpha < 1)$, dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_k}(A_n) = \alpha, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Soluţie. Vom folosi pentru demonstraţie o propoziţie referitoare la spaţiile Hilbert.

Propoziţie. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert, cu produsul scalar $<.,.>$ şi norma $\|\cdot\|$, şi fie $(f_n)_{0\leqslant n<\infty} \subset \mathcal{H}$ un şir de elemente avînd proprietăţile

$$\|f_n\| \leqslant k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\lim_{n\to\infty} < f_k, f_n > = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1'}$$

Atunci pentru orice $g \in \mathcal{H}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} < g, f_n > = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ cel mai mic subspaţiu Hilbert care conţine pe $(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$. Pentru $g \in \mathcal{H}_1$, de forma

$$g = \sum_{k=0}^{m} c_k f_k.$$

avem evident

$$\lim_{n\to\infty} < g, f_n > = 0.$$

Fie acum $g \in \mathcal{H}_1$ arbitrar. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\tilde{g} \in \mathcal{H}_1$ de forma

$$\tilde{g} = \sum_{k=0}^{m} c_k f_k,$$

astfel încît

$$\|g - \tilde{g}\| < \varepsilon,$$

*) În terminologia engleză „strongly mixing".

de unde rezultă că

$$|<g, f_n> - <\tilde{g}, f_n>| = |<g - \tilde{g}, f_n>| \leqslant \|g - \tilde{g}\| \cdot \|f_n\| \leqslant k \cdot \varepsilon$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} |<g, f_n> - <\tilde{g}, f_n>| \leqslant k \cdot \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitar, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} <g, f_n> = 0.$$

Fie acum complementul ortogonal al lui $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1 = \{g : <g, h> = 0,\ h \in \mathcal{H}_1\} \text{ și fie } g \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1.$$

Atunci avem evident că

$$<g, f_n> = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Să considerăm acum un element arbitrar $g \in \mathcal{H}$. El admite descompunerea unică

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 \in \mathcal{H}_1, \quad g_2 \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1.$$

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} <g, f_n> = 0$$

și cu aceasta propoziția este demonstrată.

Să trecem acum la demonstrația problemei propuse. Considerăm pentru aceasta spațiul Hilbert $\mathcal{L}^2(\Omega, K, P)$ cu produsul scalar obișnuit.

$$f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega, K, P), <f, g> = \int_\Omega fg\,dP.$$

Să definim acum șirul

$$f_n(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{dacă} \quad \omega \in A_n \\ -\alpha & \text{dacă} \quad \omega \notin A_n \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se calculează ușor că

$$<f_k, f_n> = P(A_k \cap A_n) - \alpha P(A_k) - \alpha P(A_n) + \alpha^2. \tag{2}$$

Cum $A_0 = \Omega$, rezultă din (1) că

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \alpha.$$

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} P(A_k \cap A_n) = P(A_k) \lim_{n\to\infty} P_{A_k}(A_n) = \alpha P(A_k)$$

și prin urmare din relația (2) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} <f_k, f_n> = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

adică condiţia (1'). Cum pe de altă parte avem şi condiţia de mărginire a normei

$$\|f_k\|^2 = < f_k, f_k > = P(A_k) - 2\alpha P(A_k) + \alpha^2 < 1 + \alpha^2$$

atunci pe baza propoziţiei demonstrate în prealabil, avem pentru orice $g \in \mathcal{L}^2(\Omega, K, P)$:

$$\lim_{n\to\infty} < g, f_n > = 0.$$

În particular, fie $B \in K$, $P(B) > 0$ şi să considerăm $g = \chi_B$ (χ_B indicatorul mulţimii B). Cum $< \chi_B, f_n > = P(A_n \cap B) - \alpha P(B)$ şi deoarece $\lim_{n\to\infty} < \chi_B, f_n > = 0$ rezultă $\lim_{n\to\infty} P_B(A_n) = \alpha$, adică şirul este „tare amestecat". Reciproc, din condiţia că şirul este „tare amestecat" rezultă condiţia (1) imediat.

19. *Să se demonstreze că dacă* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *este un şir de variabile aleatoare astfel încît pentru orice* $\varepsilon > 0$ *avem* $\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - a| > \varepsilon) = 0$ *unde* a *este o constantă şi dacă* $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(|c_n \xi_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

SOLUŢIE. Avem

$$|c_n \xi_n - a| = |c_n\xi_n - a + \xi_n - \xi_n| \leqslant |\xi_n - a| + |c_n - 1|\,|\xi_n| \leqslant$$
$$\leqslant |\xi_n - a| + |c_n - 1|\,(|\xi_n - a| + |a|).$$

De aici urmează

$$\left\{\omega : |\xi_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega : |c_n - 1|\,(|\xi_n - a| + |a|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset$$
$$\subset \{\omega : |c_n \xi_n - a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Sau

$$\{\omega : |c_n\xi_n - a| > \varepsilon\} \subset \left\{\omega : |\xi_n - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega : |\xi_n - a| > \frac{\varepsilon}{2\,|c_n - 1|} - |a|\right\}.$$

Luînd probabilitatea acestei incluziuni, avem

$$P(\omega : |c_n \xi_n - a| > \varepsilon) \leqslant P\left(\omega : |\xi_n - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$
$$+ P\left(\omega : |\xi_n - a| > \frac{\varepsilon}{2\,|c_n - 1|} - |a|\right).$$

Făcînd pe $n \to \infty$, găsim

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |c_n \xi_n - a| > \varepsilon) = 0,$$

întrucît fiecare termen din membrul al doilea al inegalității tinde la zero în virtutea ipotezei făcute.

20. *Dacă șirul de variabile aleatoare* $(\xi)_{n\in N^*}$ *pentru orice* α *și* β $(\alpha < \beta)$ *satisface relația*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \alpha < \xi_n(\omega) < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

unde $F(x)$ *este o funcție continuă, și dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \alpha_n < \xi_n(\omega) < \beta_n) = F(\beta) - F(\alpha).$$

SOLUȚIE. Din faptul că $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ rezultă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{și} \quad \beta - \varepsilon < \beta_n < \beta + \varepsilon.$$

De aici urmează că

$$\{\omega : \alpha+\varepsilon<\xi_n(\omega)<\beta-\varepsilon\} \subseteq \{\omega : \alpha_n<\xi_n(\omega)<\beta_n\} \subseteq \{\omega : \alpha-\varepsilon<\xi_n(\omega)<\beta+\varepsilon\},$$

sau dacă luăm probabilitatea, avem

$$P(\omega : \alpha + \varepsilon < \xi_n(\omega) < \beta - \varepsilon) \leqslant P(\omega : \alpha_n < \xi_n(\omega) < \beta_n) \leqslant$$
$$\leqslant P(\omega : \alpha - \varepsilon < \xi_n(\omega) < \beta + \varepsilon).$$

Ținînd seama acum de faptul că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \alpha + \varepsilon < \xi_n(\omega) < \beta - \varepsilon) = F(\beta - \varepsilon) - F(\alpha + \varepsilon)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \alpha - \varepsilon < \xi_n(\omega) < \beta + \varepsilon) = F(\beta + \varepsilon) - F(\alpha-\varepsilon)$$

precum și de faptul că $F(x)$ este continuă, rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \alpha_n < \xi_n(\omega) < \beta_n) = F(\beta) - F(\alpha).$$

21. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N}$ *un șir de variabile aleatoare, care converge în probabilitate către variabila aleatoare* ξ. *Fie* a_1 *și* a_2 $(a_1 < a_2)$ *două puncte de continuitate ale funcției de repartiție* $F(x)$ *a variabilei aleatoare* ξ. *Notăm cu*

$$A = \{\omega : a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_2\} \quad \text{și} \quad A_n = \{\omega : a_1 \leqslant \xi_n(\omega) < a_2\}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \Delta A) = 0.$$

SOLUŢIE. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ se poate găsi datorită continuităţii lui $F(x)$ în punctele a_1 şi a_2 — un număr pozitiv $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $|F(x) - F(a_i)| < \varepsilon$ dacă $|x - a_i| < \delta(\varepsilon)$, $i = 1, 2$.

Însă

$$A_n \cap A^c = [A_n \cap \{\omega : \xi(\omega) < a_1 - \delta\}] \cup [A_n \cap \{\omega : \xi(\omega) \geqslant a_2 + \delta\}] \cup$$
$$\cup [A_n \cap \{\omega : a_1 - \delta \leqslant \xi(\omega) < a_1\}] \cup [A_n \cap \{\omega : a_2 \leqslant \xi(\omega) < a_2 + \delta\}]$$

şi luînd probabilitatea acestor egalităţi, obţinem

$$P(A_n \cap A^c) = P[A_n \cap \{\omega : \xi(\omega) < a_1 - \delta\}] + P[A_n \cap \{\omega : \xi(\omega) \geqslant a_2 + \delta\}] +$$
$$+ P[A_n \cap \{\omega : a_1 - \delta \leqslant \xi(\omega) < a_1\}] + P[A_n \cap \{\omega : a_2 \leqslant \xi(\omega) < a_2 + \delta\}] \leqslant$$
$$\leqslant P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) + P(\omega : a_1 - \delta \leqslant \xi(\omega) < a_1) +$$
$$+ P(\omega : a_2 \leqslant \xi(\omega) < a_2 + \delta) = P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) +$$
$$+ F(a_1) - F(a_1 - \delta) + F(a_2 + \delta) - F(a_2).$$

Mai departe, din egalitatea

$$A_n^c \cap A = [A_n^c \cap \{\omega : a_1 + \delta \leqslant \xi(\omega) < a_2 - \delta\}] \cup$$
$$\cup [A_n^c \cap \{\omega : a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_1 + \delta\}] \cup [A_n^c \cap \{\omega : a_2 - \delta \leqslant \xi(\omega) < a_2\}]$$

rezultă

$$P(A_n^c \cap A) = P[A_n^c \cap \{\omega : a_1 + \delta \leqslant \xi(\omega) < a_2 - \delta\}] +$$
$$+ P[A_n^c \cap \{\omega : a_1 \leqslant \xi(\omega) < a_1 + \delta\}] + P[A_n^c \cap \{\omega : a_2 - \delta \leqslant \xi(\omega) < a_2\}] \leqslant$$
$$\leqslant P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) + F(a_1 + \delta) - F(a_1) + F(a_2) - F(a_2 - \delta).$$

Ţinînd seamă că $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, atunci există $N(\varepsilon, \delta)$ astfel, încît $n \geqslant N(\varepsilon, \delta)$ să avem

$$P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) < \varepsilon.$$

Urmează deci că

$$P(A_n \cap A^c) < 3\varepsilon$$

şi

$$P(A_n^c \cap A) < 3\varepsilon$$

de unde urmează că $P(A_n \Delta A) < 6\varepsilon$ de îndată ce $n \geqslant N(\varepsilon, \delta)$.

Observaţie. Dacă $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_k, b_k]$, ... sînt intervale disjuncte iar a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sînt puncte de continuitate ale funcţiei de repartiţie a variabilei aleatoare ξ şi dacă notăm cu

$$A^{(i)} = \{\omega : a_i \leqslant \xi(\omega) < b_i\}$$

iar cu

$$A_n^{(i)} = \{\omega : a_i \leqslant \xi_n(\omega) < b_i\}; \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

atunci pentru orice $k \in N^*$ fixat avem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} P(A_n^{(i)} \Delta A^{(i)}) = 0.$$

Această proprietate rezultă imediat pe baza exercițiului de mai înainte pentru orice k fixat.

22. *Dacă $(\xi_n)_{n\in N^*}$ este un șir de variabile aleatoare, convergent în probabilitate către variabila aleatoare ξ și a un punct de continuitate al funcției de repartiție $F(x)$ a variabilei aleatoare ξ astfel încît $F(a) < \varepsilon$ sau $1 - F(a) < \varepsilon$, atunci există un număr natural N_0 astfel încît pentru $n \geqslant N_0$.*

$$P(\omega : \xi_n(\omega) < a) < 2\varepsilon$$

sau

$$1 - P(\omega : \xi_n(\omega) < a) < 2\varepsilon.$$

SOLUȚIE. Afirmația făcută rezultă imediat de faptul că a este punct de continuitate pentru $F(x)$ și din

$$P(\omega : \xi_n(\omega) < a) = P(\omega : \xi_n(\omega) < a;\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \delta) +$$
$$+ P(\omega : \xi_n(\omega) < a;\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) \leqslant P(\omega : \xi(\omega) < a + \delta) +$$
$$+ P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) \leqslant 2\varepsilon$$

îndată ce $n \geqslant N_0$.

Cazul în care $1 - F(a) < \varepsilon$ se tratează analog.

23. *Fie $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare astfel, încît $M(\xi_n)$ există $n = 1, 2, \ldots$ și*

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi_n) = M \qquad (|M| < \infty).$$

Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

a) $$\lim_{N\to\infty} \int_{\{\omega:\,|\xi_n(\omega)|>N\}} |\xi_n(\omega)|\, dP(\omega) = 0$$

uniformă în raport cu n.

b) $$\lim_{n\to\infty} |P_A(\omega : \xi_n(\omega) < x) - P(\omega : \xi_n(\omega) < x)| = 0,$$

unde A este un eveniment oarecare astfel, încît

$$0 < P(A) < 1.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi_n/A) = M.$$

SOLUȚIE. Avem prin definiție

$$M(\xi_n/A) = \frac{1}{P(A)} \int_A \xi_n(\omega)\, dP(\omega) = \frac{1}{P(A)} \left\{ \int_{\{\omega:\,|\xi_n(\omega)|\leqslant N\}\cap A} \xi_n(\omega)\, dP(\omega) + \right.$$
$$\left. + \int_{\{\omega:\,|\xi_n(\omega)|>N\}\cap A} \xi_n(\omega)\, dP(\omega) \right\},\ n = 1, 2, \ldots$$

unde N este un număr natural arbitrar.

Condiţia (a) ne asigură că pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi $N = N(\varepsilon, A)$ astfel încît pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| \frac{1}{P(A)} \int_{A \cap \{\omega: |\xi_n(\omega)| > N(\varepsilon)\}} \xi_n(\omega) dP(\omega) \right| \leqslant \frac{1}{P(A)} \int_{\{\omega: |\xi_n(\omega)| > N(\varepsilon)\}} |\xi_n(\omega)| dP(\omega). \tag{1}$$

Astfel avem

$$\left| M(\xi_n/A) - \frac{1}{P(A)} \int_{\{\omega: |\xi_n(\omega)| \leqslant N(\varepsilon)\} \cap A} \xi_n(\omega) dP(\omega) \right| < \varepsilon, \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Dar pentru fiecare $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{P(A)} \int_{A \cap \{\omega: |\xi_n(\omega)| \leqslant N(\varepsilon)\}} \xi_n(\omega) dP(\omega) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{|kh_0| \leqslant N(\varepsilon)} kh_0 \, P(\omega : kh_0 \leqslant \xi_n(\omega) < (k+1)h_0/A)$$

unde h_0 este un număr pozitiv fixat şi $h_0 < \varepsilon$.

Fie

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{N(\varepsilon)\left[\frac{N(\varepsilon)}{h_0}\right]}.$$

Atunci din condiţia (b) urmează că putem găsi un număr $n_0 = n_0(\varepsilon') = n_0(\varepsilon)$ astfel, încît pentru $n \geqslant n_0$ să avem

$$|P(\omega : kh_0 \leqslant \xi_n(\omega) < (k+1)h_0/A) - P(\omega : kh_0 \leqslant \xi_n(\omega) < (k+1)h_0)| < \varepsilon$$

pentru orice întreg k pentru care $|kh_0| \leqslant N(\varepsilon)$.

Folosind această inegalitate, obţinem pentru $n \geqslant n_0$

$$\frac{1}{P(A)} \int_{A \cap \{\omega: |\xi_n(\omega)| \leqslant N(\varepsilon)\}} \xi_n(\omega) dP(\omega) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{|kh_0| \leqslant N(\varepsilon)} kh_0 \, P(\omega : kh_0 \leqslant \xi_n(\omega) < (k+1)h_0) - \varepsilon.$$

Din (2) urmează pentru $n \geqslant n_0$

$$M(\xi_n/A) \geqslant \sum_{|kh_0| \leqslant N(\varepsilon)} kh_0 P(\omega : kh_0 \leqslant \xi_n(\omega) < (k+1)h_0) - 2\varepsilon. \tag{3}$$

Pe de altă parte din (1) rezultă că

$$\left| M(\xi_n) - \int_{\{\omega: |\xi_n(\omega)| \leqslant N(\varepsilon)\}} \xi_n(\omega) dP(\omega) \right| < \varepsilon, \; n = 1, 2, \ldots$$

și deci pentru $n = 1, 2, 3.$

$$\left| \int_{\{\omega : |\xi_n(\omega)| \leqslant N(\varepsilon)\}} \xi_n(\omega)\, dP(\omega) - \right.$$

$$\left. - \sum_{|kh_0| \leqslant N(\varepsilon)} kh_0 P(\omega : kh_0 \leqslant \xi_n(\omega) < (k+1)h_0) \right| < \varepsilon.$$

Comparînd ultimele două inegalități obținute cu (3), obținem pentru $n \geqslant n_0$

$$M(\xi_n/A) \geqslant M(\xi_n) - 4\varepsilon$$

din care urmează că

$$\liminf_{n\to\infty} M(\xi_n/A) \geqslant M. \tag{4}$$

Folosind din nou condiția (b), urmează că

$$\lim_{n\to\infty} |P(\{\omega : \xi_n(\omega) < x\}/A) - P(\omega : \xi_n(\omega) < x)| = 0.$$

Un raționament analog cu cel precedent, ne conduce la

$$\liminf_{n\to\infty} M(\xi_n/A^c) \geqslant M. \tag{5}$$

Cum

$$M(\xi_n) = M(\xi_n/A)P(A) + M(\xi_n/A^c)P(A^c)$$

avem

$$\limsup_{n\to\infty} M(\xi_n/A) \leqslant M \tag{6}$$

ținînd seama și de (5).

Din (4) și (6) urmează imediat afirmația făcută.

24. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un șir de variabile aleatoare independente pentru care* $M(\xi_k)$ *și* $D^2(\xi_k)$ $k = 1, 2, \ldots$ *există. Dacă seriile* $\sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_k)$ *și* $\sum_{k=1}^{\infty} D^2(\xi_k)$ *sînt convergente atunci seria* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ *converge aproape sigur.*

SOLUȚIE. Din condițiile enunțului rezultă imediat că seriile $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ și $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - M(\xi_k))$ sînt în același timp convergente sau nu. De aceea putem presupune, fără a restrînge generalitatea că $M(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Pentru a demonstra că seria $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ converge aproape sigur, este suficient să arătăm că

$$P\left((\omega : \limsup_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} \left| \sum_{k=n}^{m} \xi_k(\omega) \right| = 0\right) = 1$$

care reprezintă criteriul lui Cauchy de convergenţă aproape sigură a seriilor de variabile aleatoare.

Să observăm că η_n converge aproape sigur către zero dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\eta_n(\omega)| > \varepsilon) < \infty. \tag{7}$$

Într-adevăr, dacă avem îndeplinită condiţia (7), atunci din teorema lui Borel-Cantelli rezultă că începînd cu un anume $n(\varepsilon)$ evenimentul $\{\omega : |\eta_n(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$ nu se realizează.

Să evaluăm acum

$$P\left(\omega : \sup_{m\geqslant n} \left| \sum_{k=n}^{m} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right).$$

Cum

$$\left\{\omega : \sup_{m\geqslant n} \left| \sum_{k=n}^{m} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right\} = \bigcup_{m\geqslant n} \left\{\omega : \sup_{n\leqslant k\leqslant m} \left| \sum_{j=n}^{k} \xi_j(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right\}$$

şi cum

$$\left\{\omega : \sup_{n\leqslant k\leqslant m} \left| \sum_{j=n}^{k} \xi_j(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{\omega : \sup_{n\leqslant k\leqslant m+1} \left| \sum_{j=n}^{k} \xi_j(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right\}$$

rezultă că

$$P\left(\omega : \sup_{m\geqslant n} \left| \sum_{k=n}^{m} \xi_k(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\omega : \sup_{n\leqslant k\leqslant m} \left| \sum_{j=n}^{k} \xi_j(\omega) \right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=n}^{m} D^2(\xi_j) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=n}^{\infty} D^2(\xi_j).$$

Cum şirul de variabile aleatoare $\eta_n(\omega) = \sup_{m\geqslant n} \left| \sum_{k=n}^{m} \xi_k(\omega) \right|$ este monotn atunci $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$, dacă avem $\lim \eta_{n_k} = 0$ pentru un subşir oarecare. Alegînd acum n_k astfel, încît

$$\sum_{j=n_k}^{\infty} D^2(\xi_j) \leqslant \frac{1}{k^2},$$

obţinem că

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega : |\eta_{n_k}(\omega)| > \varepsilon) < \infty.$$

Aceasta înseamnă că

$$P(\omega : \lim_{k\to\infty} \eta_{n_k}(\omega) = 0) = 1$$

și

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega) = 0) = 1$$

ceea ce dovedește afirmația făcută.

25. *Fie* $(\xi_n^{(i)})_{n\in N^*}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, *k șiruri de variabile aleatoare astfel, încît* $\xi_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *o funcție măsurabilă Borel și A mulțimea punctelor de discontinuitate a funcției* $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *în spațiul* $R^{(k)}$.

Dacă probabilitatea ca vectorul de coordonate $(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)})$ *să cadă în mulțimea A este egală cu zero, atunci variabila aleatoare* $\eta_n = f(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ *converge în probabilitate către variabila aleatoare* $\eta = f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(k)})$.

SOLUȚIE. Este suficient să arătăm că din fiecare șir n_m se poate extrage un subșir $n_{m'}$ astfel încît $P(\lim \eta_{n_{m'}} = \eta) = 1$.

Pentru aceasta va fi suficient să se aleagă subșirul $n_{m'}$ astfel încît $P(\lim \xi^{(i)}_{n_{m'}} = \xi^{(i)}) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Într-adevăr avem incluziunea

$$\{(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(k)}) \in A\} \subset \{\omega : \lim_{n_{m'}\to\infty} \eta_{n_{m'}}(\omega) = \eta(\omega)\} \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\omega : \xi^{(i)}_{n_{m'}}(\omega) \nrightarrow \xi^{(i)}\} \right).$$

Cum $P(\omega : (\xi^{(1)}(\omega), \xi^{(2)}(\omega), \ldots, \xi^{(k)}(\omega)) \in A) = 1$ urmează că

$$P(\lim_{n_{m'}\to\infty} \eta_{n_{m'}}(\omega) = \eta(\omega)) = 1$$

care demonstrează afirmația făcută.

Observație. Dacă $\xi_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$ și dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ este continuă, atunci

$$f(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(k)}).$$

26. *Fie* $(\xi_n^{(i)})_{n\in N^*}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *k șiruri de variabile aleatoare despre care presupunem că* $\xi_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Atunci pentru toți $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R$ *pentru care*:

$P(\omega : \xi^{(i)}(\omega) = a_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *este adevărată relația*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n^{(i)}(\omega) < a_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k) = P(\omega : \xi^{(i)}(\omega) < a_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k).$$

SOLUŢIE. Fie

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_i < a_i, \ 1 \leqslant i \leqslant k, \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases}$$

Atunci funcţia φ satisface condiţiile exerciţiului precedent căci funcţia φ este discontinuă numai pe hipersuprafeţele $x_i = a_i$ iar:

$$P(\omega : \xi^{(i)}(\omega) = a_i) = 0.$$

Prin urmare

$$\eta_n = \varphi(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \varphi(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}) = \eta.$$

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ avem

$$0 = \lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \left|\eta_n(\omega) - \eta(\omega)\right| > \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_n(\omega) = 1 ; \eta(\omega) = 0) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_n(\omega) = 0, \ \eta(\omega) = 1).$$

Cum avem

$$|P(\omega : \eta_n(\omega) = 1) - P(\omega : \eta(\omega) = 1)| = |P(\omega : \eta_n(\omega) = 1, \eta(\omega) = 1) +$$
$$+ P(\omega : \eta_n(\omega) = 1, \eta(\omega) = 0) - P(\omega : \eta_n(\omega) = 1, \eta(\omega) = 1) -$$
$$- P(\omega : \eta_n(\omega) = 0, \eta(\omega) = 1)| \leqslant P(\omega : \eta_n(\omega) = 1, \ \eta(\omega) = 0) +$$
$$+ P(\omega : \eta_n(\omega) = 0, \ \eta(\omega) = 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

şi pe de altă parte

$$P(\omega : \eta_n(\omega) = 1) = P(\omega : \xi_n^{(1)}(\omega) < a_1, \ldots, \xi_n^{(k)}(\omega) < a_k)$$

şi

$$P(\omega : \eta(\omega) = 1) = P(\omega : \xi^{(1)}(\omega) < a_1, \ldots, \xi^{(k)}(\omega) < a_k).$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \xi_n^{(i)}(\omega) < a_i ; \ 1 \leqslant i \leqslant k) = P(\omega : \xi^{(i)}(\omega) < a_i ; 1 \leqslant i \leqslant k).$$

27. *Dacă pentru* $\alpha > 1$ *există un număr* C *astfel încît* $M(|\xi_n|^\alpha) \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$ *şi dacă* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi_n) = M(\xi).$$

SOLUŢIE. Fie funcţia $g_N : R \to R$ prin relaţia

$$g_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |x| \leqslant N, \\ N+1-|x| & \text{dacă } N < |x| \leqslant N+1. \\ 0 & \text{dacă } |x| > N+1. \end{cases}$$

În virtutea teoremei lui Lebesgue avem

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\xi_n g_N(\xi_n)\right) = M\left(\xi g_N(\xi)\right).$$

Urmează de aici că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M\left(|\xi_n - \xi|\right) \leqslant M\left(|g_N(\xi)\,\xi - \xi|\right) +$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}} M\left(|g_N(\xi_n)\,\xi_n - \xi_n|\right) + \overline{\lim_{n\to\infty}} M\left(|g_N(\xi_n)\,\xi_n - g_N(\xi)\,\xi|\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(|\xi|\,(1 - g_N(\xi))\right) + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{M\left(|\xi_n|^{\alpha}\right)}{N^{\alpha-1}} \leqslant M\left(|\xi|\,(1 - g_N(\xi))\right) + \frac{C}{N^{\alpha-1}}.$$

Din această inegalitate, ținînd seamă de teorema lui Lebesgue și de faptul că N este arbitrar, rezultă imediat afirmația făcută.

28. *Fie* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, *n variabile aleatoare independente și să notăm prin* $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$. *Dacă pentru* $\alpha < 1$ *avem*

$$P\left(|S_n - S_k| \geqslant a\right) \leqslant \alpha,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

atunci

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha + x\right) \leqslant \frac{1}{1-\alpha} P\left(|S_n| \geqslant x\right).$$

SOLUȚIE. Notăm cu $\eta = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k|$. Pentru orice $a > 0$ să punem

$$\chi_k(a) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |S_1| < a, \ldots, |S_{k-1}| < a, |S_k| \geqslant a \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Printre variabilele $\chi(a)$ numai una poate fi diferită de zero. Evenimentul $\sum_{k=1}^{n} \chi_k(a) = 1$ înseamnă că $\eta \geqslant a$ și de aceea

$$P\left(\eta \geqslant a\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k(a) = 1\right) = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k(a)\right).$$

Să evaluăm deci $M\left(\chi_k(a + x)\right)$

$$M\left(\chi_k(a+x)\right) = P\left(|S_1| < a + x, \ldots, |S_{k-1}| < a + x, |S_k| \geqslant a + x\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\alpha} P\left(|S_1| < a + x, \ldots, |S_{k-1}| < a + x, |S_k| \geqslant a + x, |S_n - S_k| \leqslant a\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\alpha} P\left(|S_1| < a + x, \ldots, |S_{k-1}| < a + x, |S_k| \geqslant a + x, |S_n| \geqslant x\right).$$

Urmează deci că avem inegalităţile

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant a+x\right)=\sum_{k=1}^{n}M\left(\chi_k\left(a+x\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{n}P\left(|S_1|<a+x,\ldots,|S_{k-1}|<a+x,|S_k|\geqslant a+x,|S_n|\geqslant x\right)=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}P\left(\sum_{k=1}^{n}\chi_k\left(a+x\right)=1,|S_n|\geqslant x\right)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}P\left(|S_n|\geqslant x\right)$$

care dovedeşte afirmaţia făcută.

29. *Să se arate că dacă variabilele aleatoare* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *sînt simetrice atunci*

$$P\left(\omega:\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k(\omega)|\geqslant a\right)\leqslant 2P\left(\omega:|S_n(\omega)|\geqslant a\right).$$

SOLUŢIE. Folosind faptul că variabilele aleatoare S_k, S_n şi S_n-S_k sînt simetrice, obţinem

$$M(\chi_k(a))=P\left(\omega:|S_1(\omega)|<a,\ldots,|S_{k-1}(\omega)|<a,|S_k(\omega)|\geqslant a\right)=$$

$$=2P\left(\omega:|S_1(\omega)|<a,\ldots,|S_{k-1}(\omega)|<a,S_k(\omega)\geqslant a\right)=$$

$$=\frac{2}{P\left(\omega:S_n(\omega)-S_k(\omega)\geqslant 0\right)}P\left(\omega:|S_1(\omega)|<a,\ldots,|S_{k-1}(\omega)|<\right.$$

$$\left.<a,S_k(\omega)\geqslant a,S_n(\omega)-S_k(\omega)\geqslant 0\right)\leqslant 4P\left(\omega:|S_1(\omega)|<\right.$$

$$\left.<a,\ldots,|S_{k-1}(\omega)|<a,|S_k(\omega)|\geqslant a,S_n(\omega)\geqslant a\right)=2P\left(\omega:|S_1(\omega)|<\right.$$

$$\left.<a,\ldots,|S_{k-1}(\omega)|<a,|S_k(\omega)|\geqslant a,|S_n(\omega)|\geqslant a\right)$$

întrucît

$$P\left(\omega:S_n(\omega)-S_k(\omega)\geqslant 0\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

Dacă acum sumăm după k inegalitatea obţinută, ajungem la relaţia

$$\sum_{k=1}^{n}M\left(\chi_k(a)\right)=2\sum_{k=1}^{n}P\left(\chi_k(a)=1,|S_n(\omega)|\geqslant a\right)=$$

$$=2P\left(\sum_{k=1}^{n}\chi_k(a)=1,|S_n(\omega)|\geqslant a\right)\leqslant 2P\left(\omega:|S_n(\omega)|\geqslant a\right)$$

de unde urmează inegalitatea

$$P\left(\omega:\sup_{1\leqslant k\leqslant n}S_k|(\omega)|\geqslant a\right)\leqslant 2P\left(\omega:|S_n(\omega)|\geqslant a\right).$$

Să presupunem acum că am ales pe x astfel încît

$$P(\omega : |S_n(\omega)| \geqslant x) \leqslant \frac{1}{4e}$$

iar

$$\varepsilon = \frac{1}{4(x+1)}$$

Atunci

$$M(e^{\varepsilon|S_n|}) \leqslant e^{\varepsilon x} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{\varepsilon[2^m(x+1)-1]} \cdot P(\omega : |S_n(\omega)| \geqslant 2^{m-1}(x+1)-1) \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{1}{4}} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2^{m-2}} = L,$$

unde L este o constantă absolută.

Să presupunem acum că $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ au repartiţii arbitrare şi că satisfac condiţiile din enunţ. Introducem variabilele aleatoare independente $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ iar ξ_k' avînd aceeaşi funcţie de repartiţie ca şi ξ_k. Dacă acum punem $\xi_k^* = \frac{1}{2}(\xi_k - \xi_k')$ constatăm că variabilele aleatoare ξ_k^*, $1 \leqslant k \leqslant n$ sînt simetrice şi satisfac condiţiile din enunţ. Punînd $S_k^* = \xi_1^* + \ldots + \xi_k^*$ şi dacă

$$P(\omega : |S_n(\omega)| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{8e},$$

atunci

$$P(\omega : |S_n^*| \geqslant a) \leqslant 2P\left(\omega : \frac{1}{2}|S_n(\omega)| \geqslant \frac{a}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4e}.$$

Alegînd $\varepsilon = \frac{1}{4(a+1)}$, obţinem conform cu prima parte a soluţiei că

$$M[e^{(\varepsilon|S_n^*|)}] \leqslant L.$$

Cum

$$|S_n^*(\omega)| \geqslant \frac{1}{2}|S_n(\omega)| - \frac{1}{2}|S_n'(\omega)|,$$

unde $S_n'(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k'(\omega)$ şi S_n' are aceeaşi repartiţie ca şi S_n urmează că

$$M(e^{\frac{\varepsilon}{2}|S_n|}) \leqslant L\,[M(e^{-\frac{\varepsilon}{2}|S_n|})]^{-1}.$$

Dar

$$M\left(e^{-\frac{\varepsilon}{2}|S_n|}\right) \geqslant e^{-\frac{\varepsilon}{2}a} P(\omega : |S_n(\omega)| \leqslant a) \geqslant$$

$$\geqslant e^{-\frac{a}{8(a+1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{8e}\right) > e^{-\frac{1}{8}} \cdot \left(1 - \frac{1}{8e}\right).$$

Prin urmare, dacă a satisface condiția

$$P(\omega : |S_n(\omega)| > a) \leqslant \frac{1}{8e},$$

atunci există o constantă H astfel încît

$$M\left(e^{\frac{|S_n|}{8(a+1)}}\right) \leqslant H.$$

Mai departe, întrucît avem întotdeauna inegalitatea

$$e^{|x|} \geqslant \frac{|x|^m}{m!},$$

deducem că

$$M\left[\left(\frac{|S_n|}{8(a+1)}\right)^m\right] \leqslant m!\, M\left(e^{\frac{|S_n|}{8(a+1)}}\right) \leqslant m!\, H.$$

Urmează de aici că

$$M(|S_n|^m) \leqslant H\, 8^m\, m!\, (a+1)^m.$$

Dacă notăm cu $L_m = H\, 8^m\, m!$ dăm peste inegalitatea propusă

$$M(|S_n|^m) \leqslant L_m (a+1)^m.$$

31. *Fie* $(\xi_n)_{n \in N^*}$ *un șir de variabile aleatoare independente și pentru care există o constantă* C *astfel încît*

$$P(\omega : |\xi_k(\omega)| > C) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Dacă seria $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ *este convergentă în probabilitate, atunci seriile* $\sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_k)$ *și* $\sum_{k=1}^{\infty} D^2(\xi_k)$ *sînt convergente.*

SOLUȚIE. Din faptul că $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ converge în probabilitate către o anumită variabilă aleatoare, urmează că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ se poate determina o constantă R, astfel încît

$$P\left(\omega : \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\right| > R\right) \leqslant \varepsilon \text{ pentru orice } n.$$

Folosind acum condiţia pusă în enunţ, avem că

$$P\left(\omega : \left|\frac{\xi_k(\omega)}{C}\right| \leqslant 1\right) = 1,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

şi din exerciţiul (30) rezultă că există o constantă H independentă de n, pentru care

$$M\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)^2\right] \leqslant H.$$

Urmează atunci că avem şi

$$D^2\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) \leqslant H$$

deci că seria $\sum_{k=1}^{\infty} D^2(\xi_k)$ este convergentă. Din exerciţiul [24] rezultă atunci că seria $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - M(\xi_k))$ este convergentă în probabilitate, de unde urmează că seria $\sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_k)$ converge în probabilitate, deci în sens obişnuit, căci $M(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ nu sînt aleatoare.

32. *Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente două cîte două cu aceeaşi funcţie de repartiţie $F(x)$.*

Să presupunem că avem îndeplinite următoarele condiţii

a) $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x\,dF(x) = 0,$

b) $\lim_{x\to-\infty} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) = 0.$

Dacă notăm cu $\zeta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\zeta_n(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

SOLUŢIE. Să notăm cu

$$\xi_{n,k} = \begin{cases} \xi_k & \text{dacă } |\xi_k| \leqslant n, \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

şi

$$\zeta_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}.$$

Urmează atunci că

$$P(\omega : \zeta_n(\omega) \neq \zeta_n^*(\omega)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(\omega : |\xi_k(\omega)| > n) =$$

$$= n\,[F(-n) + (1 - F(n))].$$

Din condiția (b) prin trecere la limită găsim imediat că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \zeta_n(\omega) \neq \zeta_n^*(\omega)) = 0.$$

Urmează de aici că $\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ dacă șirul $\zeta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$. Cum însă avem inegalitatea

$$P(\omega : |\zeta_n(\omega)| > \varepsilon) \leqslant P(\omega : |\zeta_n^*(\omega)| \geqslant \varepsilon) + P(\omega : \zeta_n(\omega) \neq \zeta_n^*(\omega))$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\zeta_n(\omega)| > \varepsilon) = 0$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\zeta_n^*(\omega)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Dar din condiția (a) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} M(\zeta_n^*) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x\,dF(x) = 0$$

și de asemenea

$$D^2(\zeta^*) \leqslant \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} x^2\,dF(x) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \int_{k-1}^{k} dF(x) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \int_{-k}^{-(k-1)} dF(x) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2\,[(a_{k-1} - a_k) + (b_{k-1} - b_k)],$$

unde am notat

$$a_k = 1 - F(k) \quad \text{și} \quad b_k = F(-k).$$

Urmează mai departe

$$D^2(\zeta_n^*) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k)(2k + 1).$$

Din condiția (b) urmează mai departe că

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\zeta_n^*) = 0,$$

adică şirul $(\zeta_n^*)_{n\in N^*}$ converge în medie de ordinul al doilea. Cum convergenţa în medie de ordinul al doilea implică convergenţa în probabilitate, avem că

$$\zeta_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Aşadar şirul $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

33. *Fie $f(x, y)$ o funcţie uniform continuă de două variabile şi*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} P(\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |f(\xi_n, \eta_n) - f(\xi, \eta)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

În cazul în care $\xi = a$ şi $\eta = b$, a, b constante, atunci este suficient ca $f(x, y)$ să fie continuă în punctul (a, b)).

SOLUŢIE. Din faptul că $f(x, y)$ este uniform continuă, urmează că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice x' şi y' care satisfac inegalităţile $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, $|y - y'| < \delta(\varepsilon)$ să avem

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Din $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$ şi $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \eta$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta) = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} P(\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| > \delta) = 0.$$

Să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : |f(\xi_n(\omega), \eta_n(\omega)) - f(\xi(\omega), \eta(\omega))| > \varepsilon) = 0.$$

Din incluziunea

$$\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega) < \delta\} \cap \{\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| < \delta\} \subset$$
$$\subset \{\omega : |f(\xi_n(\omega), \eta_n(\omega)) - f(\xi(\omega), \eta(\omega))| < \varepsilon\},$$

rezultă

$$\{\omega : |f(\xi_n, \eta_n) - f(\xi, \eta)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{\omega : |\xi_n - \xi| \geqslant \delta\} \cup \{\omega : |\eta_n - \eta| \geqslant \delta\}.$$

Luînd probabilitatea acestei incluziuni, avem

$$P(\omega : |f(\xi_n, \eta_n) - f(\xi, \eta))| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P(\omega : |\xi_n - \xi| \geqslant \delta) +$$
$$+ P(\omega : |\eta_n - \eta| \geqslant \delta) \leqslant 2\varepsilon'$$

îndată ce $n \geqslant N(\varepsilon, \varepsilon')$.

34. *Fie variabilele aleatoare* $\xi_{m,n}$, $\eta_{m,n}^{(j)}$, $\zeta_{m,n}^{(j)}$ *și* ν_n *cu* $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ *și* $j = 1, 2, \ldots, k$, *iar*

$$\nu_n = \xi_{m,n} + \sum_{j=1}^{k} \eta_{m,n}^{(j)} \zeta_{m,n}^{(j)}.$$

Presupunem că sînt îndeplinite condițiile

a) $\lim\limits_{m\to\infty} \limsup\limits_{n} P(\omega : |\eta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > \varepsilon) = 0$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *și* $j = 1, 2, \ldots, k$.

b) $\lim\limits_{M\to\infty} \limsup\limits_{m} \limsup\limits_{n} P(\omega : |\zeta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > M) = 0$ *pentru fiecare* $j = 1, 2, \ldots, k$.

c) *Funcția de repartiție a lui* $\xi_{m,n}$ *converge către funcția de repartiție* F, *pentru fiecare* m *fix.*

Atunci funcția de repartiție a variabilei ν_n *converge către* F.

SOLUȚIE. Fie α un punct de continuitate, arbitrar, al lui F și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Vom arăta că pentru n suficient de mare, avem

$$|P(\omega : \nu_n(\omega) \leqslant \alpha) - F(\alpha)| < \varepsilon. \qquad (\alpha)$$

În problema 6 să punem

$$\xi = \nu_n, \quad \eta = -\sum_{j=1}^{k} \eta_{m,n}^{(j)} \zeta_{m,n}^{(j)}, \; a = \alpha, \; b = \delta.$$

atunci pentru orice m, n, $\delta > 0$ avem

$$|P(\omega : \nu_n(\omega) \leqslant \alpha) - F(\alpha)| \leqslant \max_{i=\pm 1} |P(\omega : \xi_{m,n}(\omega) \leqslant \alpha + i\delta) - F(\alpha)| +$$

$$+ P(\omega : |\sum_{j=1}^{k} \eta_{m,n}^{(j)}(\omega)\, \zeta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > \delta) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\pm 1} |P(\omega : \xi_{m,n}(\omega) \leqslant \alpha + i\delta) - F(\alpha + i\delta)| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} P(\omega : |\zeta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > M) + \sum_{j=1}^{k} P\left(\omega : |\eta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > \frac{\delta}{kM}\right). \qquad (\beta)$$

Fixăm pe $\delta > 0$ astfel încît :

(1) $a + \delta$ și $\alpha - \delta$ să fie puncte de continuitate ale lui F.

(2) $\max\limits_{i=\pm 1} |F(\alpha) - F(\alpha + i\delta)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Folosind condiția (*b*) fixăm pe M — suficient de mare — astfel încît

(3) $\limsup\limits_{m} \limsup\limits_{n} P(\omega : |\zeta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > M) > \frac{\varepsilon}{4k}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Din condiția (a) și din relația (3) rezultă că putem fixa pe m suficient de mare, astfel ca

(4) $\limsup\limits_{n} P(\omega : |\zeta_{m,n}^{(j)}(\omega)| > M) < \frac{\varepsilon}{4k}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

şi

$$(5)\ \limsup_n P\left(\omega : |\eta^{(j)}_{m,n}(\omega)| > \frac{\delta}{kM}\right) < \frac{\varepsilon}{4k},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Din relaţiile (1), (4), (5) precum şi din condiţia (c), rezultă că putem determina un n_0 astfel încît pentru orice $n \geqslant n_0$ să avem

$$(6)\ \max_{i=\pm 1} |P(\omega : \xi_{m,n}(\omega) \leqslant \alpha + i\delta) - F(\alpha + i\delta)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$(7)\ P(\omega : |\zeta^{(j)}_{m,n}(\omega)| > M) < \frac{\varepsilon}{4k},\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$(8)\ P\left(\omega : |\eta^{(j)}_{m,n}(\omega)| > \frac{\delta}{4M}\right) < \frac{\varepsilon}{4k},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Înlocuind acum (2), (6), (7) şi (8) în (β) obţinem (α) ceea ce dovedeşte afirmaţia făcută.

35. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un şir de variabile aleatoare,* $(c_n)_{n\in N^*}$ *un şir de numere reale şi* $(d_n)_{n\in N^*}$ *un şir de numere pozitive cu proprietatea* $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$.

Presupunem că $(\xi_n)_{n\in N^*} \in (SK)$ *şi să notăm cu* $\eta_n = \frac{\zeta_n - c_n}{d_n}$, unde $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Dacă în toate punctele de continuitate ale funcţie $F(a)$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_n(\omega) < a) = F(a),$$

atunci oricare ar fi $B \in K$, $P(B) > 0$, *avem în toate punctele de continuitate ale lui* $F(a)$:

$$\lim_{n\to\infty} P_B(\omega : \eta_n(\omega) < a) = F(a).$$

SOLUŢIE. Fie a un punct de continuitate al lui $F(a)$, cu $F(a) > 0$. (Este suficient să considerăm numai astfel de valori ale lui a). Pentru $n \geqslant n_0$ avem în mod evident

$$P(\omega : \eta_n(\omega) < a) > 0.$$

Alegem $A_0 = \Omega$, $A_n = \{\omega : \eta_{n+n_0}(\omega) < a\}$ şi să introducem variabila aleatoare

$$\nu_n = -\frac{\zeta_k}{d_n}.$$

Cum $(\eta_n)_{n\in N^*}$ are o repartiţie limită, iar $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ folosind problema (9) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_n(\omega) - \frac{\zeta_k(\omega)}{d_n} < a) = F(a).$$

Cum

$$\eta_n - \frac{\zeta_k}{d_n} = \frac{\zeta_n - \zeta_k - c_n}{d_n} = \frac{\zeta_{k+1} + \ldots + \xi_n - c_n}{d_n}$$

rezultă imediat că $\eta_n - \frac{\zeta_k}{d_n}$ este independentă de variabila aleatoare

$$\eta_k = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k}{d_k}.$$

Prin urmare vom avea

$$\lim_{n\to\infty} P_{(\omega:\, \eta_k(\omega) < a)}\left(\omega : \eta_n(\omega) - \frac{\zeta_k(\omega)}{d_n} < a\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \eta_n(\omega) - \frac{\zeta_k(\omega)}{d_n} < a\right) = (Fa).$$

Considerînd acum variabilele $\eta_n - \frac{\zeta_k}{d_n}$ și $\frac{\zeta_k}{d_n}$ pe cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P^*\}$, unde $P^* : K \to [0, 1]$ prin relația

$$P^*(A) = P_{(\omega:\eta_k(\omega)<a)}(A),$$

cum $\frac{\zeta_k}{d_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ pe baza problemei 9 conform cu (8), deducem că

$$\lim_{n\to\infty} P_B(\omega : \eta_n(\omega) < a) = F(a),$$

oricare ar fi $B \in K$, cu $P(B) > 0$.

36. *Fie* $(k_n)_{n\in N^*}$ și $(l_n)_{n\in N^*}$ *două șiruri ce tind la infinit și* A_n *un eveniment ce depinde numai de variabilele aleatoare* $\xi_{k_n}, \ldots, \xi_{l_n}$. *Dacă* A *este un eveniment oarecare pentru care* $P(A) > 0$, *atunci*

$$\limsup_n P_A(A_n) = \limsup_n P(A_n)$$

SOLUȚIE. Pentru n_0 fixat și n suficient de mare, avem

$$P(A_{n_0} \cap A_n) - P(A_{n_0})\, P(A_n) = 0.$$

Fie $f_n = I_n - P(A_n)$, unde I_n este indicatorul mulțimii A_n. Un calcul imediat ne arată că

$$\lim_{n\to\infty} < f_k, f_n > = 0$$

Dacă acum g este indicatorul mulțimii A, obținem

$$P(A \cap A_n) - P(A)\, P(A_n) = < g, f_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

În aceste condiţii, dacă $P(A) > 0$, avem

$$P_A(A_n) - P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ceea ce implică

$$\limsup_n P_A(A_n) = \limsup_n P(A_n).$$

37. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un şir de variabile aleatoare ce satisfac următoarele condiţii*:

(a) $(\xi_n)_{n\in N^*} \in (SK)$;

(b) $(\xi_n)_{n\in N^*} \subset L^2(\Omega, K, P)$;

(c) $M_1(\xi_n) = 0, \qquad n \in N^*$;

(d) $M_2(\xi_n) = 1, \qquad n \in N^*$;

(e) $P(\omega : \xi_n(\omega) < a) = F(a), \; n \in N^*$

şi fie şirul $(\eta_n)_{n\in N^*}$ *cu termenul general dat de*

(f) $$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Dacă $(\lambda_n)_{n\in N^*}$ *este un şir de variabile aleatoare întregi pozitive astfel încît*

$$\frac{\lambda_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda, \tag{1}$$

unde λ *este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete, avem*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_{\lambda_n}(\omega) < a\sqrt{\lambda_n(\omega)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

SOLUŢIE. I) Să considerăm mai întîi cazul particular în care

$$\lambda_n = [n\lambda]$$

şi fie $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ valorile luate de către variabila aleatoare λ. Fie evenimentul $A_k = \{\omega : \lambda(\omega) = \alpha_k\}$.

Avem

$$P(\omega : \eta_{\lambda_n}(\omega) < a\sqrt{\lambda_n(\omega)}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{\omega : \eta_{[n\lambda]}(\omega) < a\sqrt{[n\lambda(\omega)]}\} \cap A_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\, P_{A_k}(\omega : \eta_{[n\alpha_k]}(\omega) < \sqrt{[n\alpha_k]}. \tag{2}$$

Teorema clasică a lui Lindeberg ne asigură că

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_n(\omega) < a\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \eta_{[n\alpha_k]}(\omega) < a\sqrt{[n\alpha_k]}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \tag{3}$$

pentru orice k. Cum $P(A_k) > 0$, pe baza problemei 35. avem

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_k}\left(\omega : \eta_{[n\alpha_k]}(\omega) < a\sqrt{[n\alpha_k]}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

oricare ar fi k pentru care $P(A_k) > 0$. Cum

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = 1,$$

din (1) și (3) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \eta_{\alpha_n}(\omega) < a\sqrt{\alpha_n(\omega)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{4}$$

II) Scriem acum identitatea evidentă

$$\frac{\eta_{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\eta_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} + \sqrt{\frac{[n\lambda]}{\lambda_n}}\left(\frac{\eta_{\lambda_n} - \eta_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}}\right) + \frac{\eta_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}}\left(\sqrt{\frac{[n\lambda]}{\lambda_n}} - 1\right).$$

Din (f) avem

$$\frac{\lambda_n}{[n\lambda]} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1.$$

Din cele arătate la punctul (I) și pe baza problemei 10, avem

$$\frac{\eta_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}}\left(\sqrt{\frac{[n\lambda]}{\lambda_n}} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{5}$$

Rămîne să arătăm că

$$\frac{\eta_{\lambda_n} - \eta_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{6}$$

Să introducem pentru aceasta evenimentele

$$B_{n,c} = \{\omega : |\lambda_n(\omega) - [n\lambda(\omega)]| < c\,n\},$$

$$C_{n,\alpha_k,\varepsilon} = \left\{\omega : \frac{\eta_{\lambda_n}(\omega) - \eta_{[n\alpha_k]}(\omega)}{\sqrt{[n\alpha_k]}} > \varepsilon\right\},$$

$$D_M = \{\omega : \lambda(\omega) \geqslant \alpha_M\}.$$

Avem

$$P\left(\omega : \left|\frac{\eta_{\lambda_n}(\omega) - \eta_{[n\alpha_k]}(\omega)}{\sqrt{[n\alpha_k]}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant P(D_M) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M-1} P(A_k \cap B_{n,c} \cap C_{n,\alpha_k,\varepsilon}) + P(B_{n,c}^c). \tag{7}$$

Inegalitatea lui Kolmogorov ne dă

$$P(A_k \cap B_{n,c} \cap C_{n,\alpha_k,\varepsilon}) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\omega : \max_{[n\alpha_k]-cn \leqslant m \leqslant [n\alpha_k]+cn} |\eta_n(\omega) - \eta_{[n\alpha_k]}(\omega)| > \varepsilon\sqrt{[n\alpha_k]}\right) \leqslant \frac{2c}{\varepsilon^2 [\alpha_k]}.$$

Din (7) şi (8) deducem

$$P\left(\omega : \left|\frac{\eta_{\lambda_n}(\omega) - \eta_{[n\lambda]}(\omega)}{\sqrt{[n\lambda]}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P(D_M) + \frac{2c}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{M-1}\frac{1}{[\alpha_k]} + P(B^c_{n,c}).$$

Fie acum $\eta > 0$ arbitrar. Alegem pe M în aşa fel că $P(D_M) < \frac{\eta}{3}$. Alegem pe c suficient de mic, astfel încît

$$\frac{2c}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{M-1}\frac{1}{[\alpha_k]} < \frac{\eta}{3}.$$

Alegem pe $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ suficient de mare, astfel încît pentru orice $n \geqslant n_0$ să avem

$$P(B^c_{n,c}) < \frac{\eta}{3}.$$

Deci $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ fiind daţi, există $n_0(\varepsilon, \eta)$ astfel, încît pentru orice $n \geqslant n_0$ să avem

$$P\left(\omega : \left|\frac{\eta_{\lambda_n}(\omega) - \eta_{[n\lambda]}(\omega)}{\sqrt{[n\lambda]}}\right| > \varepsilon\right) < \eta$$

şi deci (6) este dovedită.

Din cele demonstrate la punctul I) şi din (5) şi (6) pe baza problemei 9, rezultă soluţia completă a problemei noastre.

38. *Fie* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate, cu valorile medii nule şi cu dispersiile egale cu unitatea. Fie* $(\lambda_n)_{n\in N^*}$ *un şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive, astfel încît*

$$\frac{\lambda_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda$$

unde λ *este o variabilă aleatoare pozitivă oarecare. Să notăm cu* $\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : \eta_{\lambda_n}(\omega) < a\sqrt{\lambda_n(\omega)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

SOLUŢIE. Definim

$$\mu_m = \frac{k}{2^m} \text{ cînd } \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}$$

şi

$$\mu_{m,n} = \lambda_n + [n(\mu_m - \lambda)].$$

Se vede imediat că variabilele μ_m sînt discrete și $0 < \mu_m - \lambda \leqslant \frac{1}{2^m}$.

Se vede de asemenea că

$$\frac{\mu_{m,n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu_m > \lambda.$$

Scriem acum

$$\frac{\eta_{\lambda n}}{\sqrt{\lambda_n}} = \xi_{m,n} + \eta^{(1)}_{m,n}\,\zeta^{(1)}_{m,n} + \eta^{(2)}_{m,n}\,\zeta^{(2)}_{m,n} =$$

$$= \frac{\eta_{\mu_{m,n}}}{\sqrt{\mu_{m,n}}} + \left(\frac{\eta_{\lambda_n} - \eta_{\mu_{m,n}}}{\sqrt{n\mu_m}}\right)\frac{\sqrt{n\mu_m}}{\sqrt{\lambda_n}} + \left(\frac{\sqrt{\mu_{m,n}} - \sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\frac{\eta_{\mu_{m,n}}}{\sqrt{\mu_{m,n}}}.$$

Din problema 37, rezultă că funcția de repartiție a lui

$$\frac{\eta_{\mu_{m,n}}}{\sqrt{\mu_{m,n}}} = \xi_{m,n} = \zeta^{(2)}_{m,n}$$

converge către repartiția normală pentru fiecare m. De aici urmează că

$$\limsup_n P\left(\omega : \left|\frac{\eta_{\mu_{m,n}(\omega)}(\omega)}{\sqrt{\mu_{m,n}(\omega)}}\right| > M\right) = 1 - \Phi(M) + \Phi(-M)$$

unde am notat cu $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$, astfel că $\{\zeta^{(2)}_{m,n}\}$ satisface condiția b) din problema 34.

Avem de asemenea, pentru $\frac{m}{2^m} \leqslant \lambda$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{\mu_{m,n}} - \sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}}\right| = \sqrt{\frac{\mu_m}{\lambda}} - 1 \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{m}} - 1$$

de unde rezultă că $\{\eta^{(1)}_{m,n}\}$ satisface condiția (a) din problema 34. Evident $\{\zeta^{(1)}_{m,n}\}$ satisface de asemenea condiția (b) din aceeași problemă. Dacă arătăm că

$$\left\{\frac{\eta_{\lambda n} - \mu_{\mu_{m,n}}}{\sqrt{n\mu_m}}\right\}$$

satisface condiţia (a), aplicînd rezultatul problemei 34, relaţiei (1), obţinem soluţia problemei noastre. Avem

$$\limsup_m \limsup_n P\left(\omega : \left|\frac{\eta_{\lambda_n(\omega)} - \eta_{\mu_{m,n}(\omega)}}{\sqrt{n\mu_m(\omega)}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \limsup_n P\left(\left\{\omega : \left|\frac{\eta_{\lambda_n} - \eta_{\mu_m}}{\sqrt{n\mu_m}}\right| > \varepsilon\right\} \cap \left\{\omega : \left|\frac{\lambda_n}{n} - \lambda\right| < 2^{-m}\right\} \cap$$

$$\cap \left\{\omega : \left|\frac{\mu_{m,n}}{n} - \mu_m\right| < 2^{-m}\right\}\right) + \limsup_m \limsup_n P\left(\omega : \left|\frac{\lambda_n}{n} - \lambda\right| \geqslant 2^{-m}\right) +$$

$$+ \limsup_m \limsup_n P\left(\omega : \left|\frac{\mu_{m,n}}{n} - \mu_m\right| \geqslant 2^{-m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \limsup_n P\left(\omega : \max_{\substack{\left|\frac{i}{n} - \lambda\right| < 2^{-m} \\ \left|\frac{j}{n} - \mu_m\right| < 2^{-m}}} \left|\frac{\eta_i - \eta_j}{\sqrt{n\mu_m}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \limsup_n \sum_{k=m}^{m2^m} P\left(\left\{\omega : \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda(\omega) < \frac{k}{2^m}\right\} \cap\right.$$

$$\left. \cap \left\{\omega : \max_{\substack{\left|\frac{i}{n} - \lambda\right| < 2^{-m} \\ \left|\frac{j}{n} - \lambda\right| < 2^{-m+1}}} \left|\frac{\eta_i - \eta_j}{\sqrt{n\mu_m}}\right| > \varepsilon\right\}\right) +$$

$$+ \limsup_m \limsup_n P\left(\left\{\omega : \lambda < \frac{m-1}{2^m}\right\} \cup \{\omega : m \leqslant \lambda\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \limsup_n \sum_{k=m}^{m2^m} P\left(\left\{\omega : \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}\right\} \cap\right.$$

$$\left. \cap \left\{\omega : \max_{\substack{\left|\frac{i}{n} - \lambda\right| < 2^{-m} \\ \left|\frac{j}{n} - \lambda\right| < 2^{-m+1}}} \frac{|s_i - s_l| + |s_j - s_l|}{\sqrt{n\mu_m}} > \varepsilon\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \sum_{k=m}^{m2^m} \limsup_n 2P_{\left\{\omega : \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda \leqslant \frac{k}{2^m}\right\}} \left\{\omega : \max_{n(k-3)2^{-m} < r < n(k+3)2^{-m}} |\eta_r - \eta_l| > \right.$$

$$\left. > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{k}{2^m}}\right\} \times P\left(\omega : \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{k}{2^m}\right).$$

Din inegalitatea lui Kolmogorov, avem :

$$P\left(\omega : \max_{n(k-3)2^{-m}<r<n(k+3)2^{-m}} |\eta_r - \eta_l| > \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{nk}{2^m}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(6n \cdot 2^{-m}+1)2^m}{\varepsilon^2 nk} = \frac{24n+2^{m+2}}{\varepsilon^2 nk}$$

și

$$\limsup_n \frac{24n+2^{m+2}}{\varepsilon^2 nk} \leqslant \frac{24}{\varepsilon^2 m} \text{ pentru } k \geqslant m.$$

Aplicînd acum problema 37, obținem din șirul de inegalități de mai înainte :

$$\limsup_m \limsup_n P\left(\omega : \left|\frac{\eta_{\lambda n} - \eta_{\mu_{m,n}}}{\sqrt{n\mu_m}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_m \sum_{k=m}^{m2^m} \cdot \frac{48}{\varepsilon^2 m} P\left(\omega : \frac{k-1}{2^m} \leqslant \lambda < \frac{1}{2^m}\right) \leqslant \limsup_m \frac{48}{\varepsilon^2 m} = 0.$$

Deci $\{\eta_{m,n}^{(\lambda)}\}$ satisface condiția (a) din problema 34 ceea ce completează demonstrația.

1. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N}$ *este un lanț Markov, să se arate că pentru orice* $n \geqslant 0$ *și* $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_{n+m}$ *și orice* $i_1, \ldots, i_n, \ldots, i_{n+m} \in I$, *unde* I *este mulțimea stărilor, avem*

$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) =$$

$$= P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1})$$

SOLUȚIE. Vom stabili egalitatea de mai înainte prin inducție. Pentru $m = 0$ relația dată corespunde definiției unui lanț Markov. Să o presupunem adevărată pentru m. Atunci

$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m+1 \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) =$$

$$= P(\xi_{t_{n+m+1}} = i_{n+m+1},\ \xi_\nu(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant m+n \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu;\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1).$$

Să notăm

$$C = \{\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1}\},$$

$$A = \{\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant m+n\},$$

$$B = \{\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1\}.$$

Atunci probabilitatea de mai înainte devine

$$P(CA \mid B).$$

Însă

$$P(CA \mid B) = \frac{P(ABC)}{P(B)} = \frac{P(AB)P(C \mid AB)}{P(B)},$$

de unde rezultă că

$$P(CA \mid B) = P(A \mid B)P(C \mid AB). \tag{1}$$

Utilizînd relația de mai înainte rezultă că

$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant m+n+1) \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) =$$

$$= P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant m+n \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1).$$

$$P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant m+n) =$$
$$= P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, n \leqslant \nu \leqslant m+n \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1})\, P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) =$$
$$= i_{n+m+1} \mid \xi_{t_{n+m}}(\omega) = i_{n+m})$$

deoarece șirul $(\xi_n)_{n\in N}$ formează un lanț Markov.

Însă

$$P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_{n+m}}(\omega) = i_{n+m}) =$$
$$= P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, n-1 \leqslant \nu \leqslant n+m)$$

și deci

$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m+1 \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ 1 \leqslant \nu \leqslant n-1) =$$
$$= P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1}) \times$$
$$\times P(\xi_{t_{n+m+1}}(\omega) = i_{n+m+1} \mid \xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, n-1 \leqslant \nu \leqslant n+m) =$$
$$P(\xi_{t_\nu}(\omega) = i_\nu,\ n \leqslant \nu \leqslant n+m+1) \mid \xi_{t_{n-1}}(\omega) = i_{n-1})$$

egalitate care rezultă din (1).

2. *Să se calculeze probabilitățile staționare pentru fiecare din lanțurile Markov ergodice definite cu ajutorul matricelor de trecere*

$$\text{a)} \left\| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix} \right\|; \quad \text{b)} \left\| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\|,$$

SOLUȚIE. a) Avem

$$\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2,$$

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2,$$

iar

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Rezolvînd sistemul de mai înainte, obținem

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}.$$

b) Avem

$$\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2$$

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$$

iar

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Rezolvînd sistemul de mai înainte, obținem

$$\pi_1 = \frac{2}{3},\ \pi_2 = \frac{1}{3}.$$

3. *Să se calculeze matricea probabilităților de trecere după* 2 *respectiv,* 3 *pași pentru un lanț Markov a cărui matrice de trecere este*

$$\text{a) } P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix};\quad \text{b) } P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix};$$

$$\text{c) } P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};\quad \text{d) } P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

SOLUȚIE. Fie $P^{(1)} = P$, iar P_2 și P_3 matricea probabilităților de trecere după doi pași, respectiv după trei pași.

a) Avem

$$P_2 = P \cdot P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Deci

$$P_2 = P.$$

Analog se arată că

$$P_3 = P.$$

În acest caz avem

$$P = P_2 = P_3.$$

b) Avem

$$P_2 = P \cdot P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}; \quad P_3 = P_2 \cdot P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{Vmatrix}.$$

c) Se arată că

$$P = P_2 = P_3.$$

d) Avem

$$P_2 = P \cdot P = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}.$$

Rezultă imediat că

$$P_3 = P_2 \cdot P = P_2.$$

4. *Să se clasifice stările lanțurilor Markov ce au următoarele matrice ale probabilităților de trecere*

$$\pi_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\pi_3 = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\|.$$

SOLUȚIE. Primul lanț este ireductibil și neperiodic. Al doilea lanț este ireductibil și periodic cu perioada $t = 3$ și are următoarele submulțimi de stări $G_1 = \{E_1\}$, $G_2 = \{E_2\}$; $G_3 = \{E_3, E_4\}$.

Al treilea lanț are două mulțimi închise de stări, $\{E_1, E_2\}$ și $\{E_3, E_4\}$ și starea de trecere E_5.

5. *Să presupunem că într-o uzină există o mașină care datorită procesului tehnologic respectiv o perioadă de timp lucrează iar apoi stă ș.a.m.d. Să notăm cu A_0 starea mașinii cînd nu funcționează și cu A_1 starea mașinii cînd funcționează.*

Fie p_{jk} probabilitatea ca din starea A_j să se treacă în starea A_k $(j, k = 0, 1)$ și anume dacă la momentul t am fost în starea A_j la momentul $t + 1$ să se treacă în starea A_k. În plus dacă presupunem că $p_{01} = \lambda$ și $p_{10} = \mu$ atunci matricea de trecere este următoarea

$$\pi = \left\| \begin{matrix} 1 - \lambda & \lambda \\ \mu & 1 - \mu \end{matrix} \right\|.$$

Se cere să se calculeze $\lim_{n \to \infty} p_i^{(n)}$, $i = 0, 1$.

SOLUȚIE. Introducînd probabilitățile inițiale

$$P(\xi_0 = i) = p_i,$$

$P(\xi_n = k) = p_k^{(n)}$ este dată de relația

$$p_k^{(n)} = \sum_{i \in I} p_i p_{ik}^{(n)}, \qquad k = 0, 1, \ldots; \; n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$p_k^{(n)} = \sum_{j \in I} p_j^{(n-r)} p_{jk}^{(r)} \qquad 0 \leqslant r < n, \tag{2}$$

unde

$$p_{kk}^{(0)} = 1 \text{ și } p_{jk}^{(0)} = 0 \text{ dacă } j \neq k \text{ și } p_j^{(0)} = p_j.$$

Dacă $P(\xi_0 = i_0) = 1$, avem $p_{i_0} = 1$ și $p_j = 0$; dacă $j \neq i_0$, atunci relația (1) devine

$$p_{ki}^{(n)} = p_{i_0 k}^{(n)}.$$

Să ne reîntoarcem la exemplul considerat. Din (2) (luăm $k = 1$, $r = 1$, $j = 0, 1$), obținem

$$p_1^{(n)} = p_0^{(n-1)} p_{01} + p_1^{(n-1)} p_{11}.$$

Cum însă $p_0^{(k)} + p_1^{(k)} = 1$, avem $p_0^{(n-1)} = 1 - p_1^{(n-1)}$. În plus avem $p_{01} = \lambda$ și $p_{10} = \mu$.

Deci

$$p_1^{(n)} = (1 - p_1^{(n-1)})\,\lambda + p_1^{(n-1)}(1 - \mu).$$

Prin inducție se obține

$$p_1^{(n)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + (1 - \lambda - \mu)^n \cdot \left[p_1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right]$$

și cum $p_0^{(n)} = 1 - p_1^{(n)}$, avem

$$p_0^{(n)} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + (1 - \lambda - \mu)^n \cdot \left[p_0 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right].$$

Într-adevăr pentru $n = 1, 2$, avem

$$p_1^1 = (1 - p_1^0)\,\lambda + p_1^0(1 - \mu) = p_1(1 - \lambda - \mu) + \lambda;\ p_1^0 = p_1,$$

$$p_1^2 = p_1^1(1 - \lambda - \mu) + \lambda$$

sau

$$p_1^{(2)} = [(1 - \lambda - \mu)\,p_1 + \lambda](1 - \lambda - \mu) + \lambda = p_1(1 - \lambda - \mu)^2 + \lambda(1 - \lambda - \mu) + \lambda,$$

de unde, adunînd și scăzînd $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - \lambda - \mu)^2$, obținem:

$$p_1^{(2)} = (1 - \lambda - \mu)^2\left[p_1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right] + \lambda(1 - \lambda - \mu) + \lambda + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - \lambda - \mu)^2 =$$

$$= (1 - \lambda - \mu)^2\left[p_1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right] + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\{(\lambda + \mu)[(1 - \lambda - \mu) + 1] +$$

$$+ (1 - \lambda - \mu)^2\} = (1 - \lambda - \mu)^2\left[p_1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right] + \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

p_0 este probabilitatea ca la momentul $t = 0$ mașina să stea; p_1 este probabilitatea ca la momentul $t = 0$ mașina să funcționeze.

Cum $|1 - \lambda - \mu| < 1$, cu excepția $\lambda = \mu = 0$ sau $\lambda = \mu = 1$, obținem

$$\lim_{n\to\infty} p_1^{(n)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,; \quad \lim_{n\to\infty} p_0^{(n)} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,.$$

6. *Vrem să aprovizionăm un magazin cu un produs dat, într-o perioadă dată (de exemplu o săptămînă). Nu se cunoaște cantitatea ce se poate vinde într-o săptămînă; sînt cunoscute însă, pe baza experienței, probabilitățile*

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_j,\ \ldots,\ P_{10\,000},$$

ca vînzarea să constea în 1, 2, ..., j, ..., 10 000 *unități. Dacă pentru orice unitate vîndută se cîștigă* 10 *lei, în timp ce pentru orice unitate ce rămîne în magazin la sfîrșitul săptămînii se cheltuiește* 2 *lei, se cere să se determine numărul x de unități ce ar trebui să existe în magazin la începutul săptămînii, pentru ca să se realizeze un maximum de beneficiu (cîștig).*

SOLUȚIE. Avem

$$\sum_{j=0}^{10000} P_j = 1$$

Să notăm cu i numărul de unități care vor fi vîndute; cînd $x \geqslant i$ vom avea un cîștig dat de

$$10 \cdot i - (x - i)2$$

cu probabilitatea P_i, adică în medie

$$\sum_{i=0}^{x} P_i \{10 \cdot i - (x - i) \cdot 2\}$$

dacă $i > x$ atunci cîștigul va fi dat de $10x$, și în medie

$$10x \sum_{i=x+1}^{10\,000} P_i.$$

Deci cîștigul va fi dat de

$$\sum_{i=0}^{x} P_i \{10 \cdot i - (x - i) \cdot 2\} + 10x \sum_{i=x+1}^{10000} P_i. \tag{1}$$

Pentru a rezolva problema este necesar să determinăm valoarea lui x, care maximizează expresia (1).

Probabilitățile P_i pot fi interpretate ca probabilitățile corespunzătoare ca vînzarea să fie cuprinsă între $i - \frac{1}{2}$ și $i + \frac{1}{2}$ unități

$$P_i = \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} p(t)\,dt,$$

unde $p(t)$ este densitatea de probabilitate.

Atunci expresia (1) devine

$$\int_0^x [10t - 2(x-t)]\, p(t)\, dt + 10x \int_x^{10000} p(t)\, dt$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\int_0^x [10t - 2(x-t)]\, p(t)\, dt + 10x \left(1 - \int_0^x p(t)\, dt\right)$$

sau

$$12\int_0^x t p(t)\, dt + 10x - 12x \int_0^x p(t)\, dt.$$

Pentru a găsi punctul de maxim vom deriva expresia de mai înainte și rezultatul îl vom egala cu zero. Avem

$$12x \cdot p(x) + 10 - 12\int_0^x p(t)\, dt - 12x \cdot p(x) = 0$$

de unde

$$\int_0^x p(t)\, dt = \frac{10}{12}$$

și cum derivata a doua este negativă

$$-12 \cdot p(x)$$

problema este rezolvată.

În cazul discret este suficient să sumăm probabilitățile P_i, începînd de la P_0 pînă la x; obținem

$$\sum_{i=0}^{x} P_i = \frac{10}{12}$$

7. *Fie lanțul Markov cu două stări E_1 și E_2 cu probabilitățile de trecere $p_{11} = p_{22} = p$, $p_{12} = p_{21} = q$ (unde $0 < p < 1$ și $p + q = 1$) și repartiția inițială $P(\xi_0 = 1) = \alpha$, $P(\xi_0 = 2) = \beta$ (unde $\alpha + \beta = 1$). Se cere:*

a) *să se determine probabilitățile de trecere după n pași $\{p_{jk}^{(n)}\}$;*

b) *să se determine probabilitățile absolute $\{P_j(n)\}$;*

c) *să se determine probabilitățile limită $\{P_j\}$;*

d) *să se determine probabilitatea condiționată $P\{\xi_0 = 1 \mid \xi_n = 1\}$.*

SOLUȚIE. Matricea probabilităților de trecere este

$$\pi = \begin{Vmatrix} p & q \\ q & p \end{Vmatrix}.$$

Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = p - q$ și ținînd seama de formula

$$\pi^n = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^n A_j$$

obținem

$$\pi^n = \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} + \frac{(p-q)^2}{2} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

b) Avem

$$P_1(n) = \alpha p_{11}^{(n)} + \beta p_{21}^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{(\alpha - \beta)(p-q)^n}{2}$$

și

$$P_2(n) = \alpha p_{21}^{(n)} + \beta p_{22}^{(n)} = \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - \beta)(p-q)^n}{2}.$$

c) Din (b) deducem

$$\lim_{n\to\infty} P_1(n) = \lim_{n\to\infty} P_2(n) = \frac{1}{2}.$$

Acest lanț Markov este ergodic și distribuția lui limită (P_1, P_2) se obține rezolvînd următorul sistem de ecuații

$$P_1 = P_1 p + P_2 q,$$
$$P_2 = P_1 q + P_2 p,$$
$$P_1 + P_2 = 1.$$

d) Pentru a calcula o probabilitate condiționată ne folosim de teorema lui Bayes

$$P\{\xi_0 = i \mid \xi_n = j\} = \frac{P\{\xi_0 = i\} \cdot P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\}}{P\{\xi_n = j\}},$$

în cazul nostru obținem

$$P\{\xi_0 = 1 \mid \xi_n = 1\} = \frac{\alpha p_{11}^{(n)}}{P_1(n)} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (\alpha - \beta)(p-q)^n}.$$

8. *Fie E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 stările unui lanț Markov ce are matricea probabilităților de trecere*

$$\pi = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Se cere să se determine:

$$\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(4n+r)} \quad \textit{pentru } r = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

SOLUȚIE. În acest lanț Markov E_1, este stare de trecere și $\{E_2, E_3, E_4, E_5\}$ formează o mulțime de stări închise. Perioada acestei mulțimi închise este $t = 4$. Valorile proprii ale matricei π sînt

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = i,\ \lambda_5 = -i.$$

Notăm prin x_j unul din vectorii coloană la stînga și y_j unul din vectorii linie la dreapta aparținînd valorilor proprii λ_j, aleși astfel încît

$$y_j' x_j = \text{constant}\ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Formăm următoarele matrice

$$A = \| x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \| \text{ și } B = \begin{Vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \end{Vmatrix}$$

sau mai explicit

$$A = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \text{ și } B = \begin{Vmatrix} 6 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -i & -1 & i & 1 \\ 0 & i & -1 & -i & 1 \end{Vmatrix}.$$

Avem $AB = 4I$ și $\pi = \frac{1}{4} A \wedge B$ unde $\wedge$ este matricea diagonală cu elementele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$. Ținînd seama de ecuația

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^n \alpha_{ij} \beta_{jk},$$

obținem

$$p_{13}^{(n)} = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{12} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dacă $n \equiv 0 \pmod 2$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)} = \frac{1}{3};$$

Dacă $n \equiv 1 \pmod 2$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)} = \frac{1}{6}.$$

9. *Fie $E_1, E_2, \ldots, E_{2a}$ stările posibile ale unui lanț Markov. Sistemul poate trece din E_j în E_{j+1} sau E_{j-1} cu probabilitățile p și respectiv q (unde $p + q = 1$). ($E_{2a+1} \equiv E_1$ și $E_0 \equiv E_{2a}$).*

Se cere:

a) *să se determine probabilitățile de trecere limită $p_{ik}^{(n)}$;*

b) *să se determine distribuția staționară $\{P_k^*\}$ a lanțului Markov.*

SOLUȚIE. a) Lanțul Markov este ireductibil și periodic cu perioada $t = 2$, și stările lui pot fi împărțite în două submulțimi:

$$G_0 = \{E_2, E_4, \ldots, E_{2a}\} \text{ și } G_1 = \{E_1, E_3, \ldots, E_{2a-1}\}.$$

Avem

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p^2 \text{ dacă } j \equiv i+2 \pmod{2a}, \\ 2pq \text{ dacă } j \equiv i \pmod{2a}, \\ q^2 \text{ dacă } j \equiv i-2 \pmod{2a}, \end{cases}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n)} = \begin{cases} P_j \text{ dacă } E_i \text{ și } E_j \text{ aparțin aceleiași mulțimi}, \\ 0 \text{ în rest}, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n+1)} = \begin{cases} P_j \text{ dacă } E_i \text{ și } E_j \text{ aparțin la mulțimi diferite}, \\ 0 \text{ în rest}. \end{cases}$$

Avem

$$\sum_{G_0} P_j = 1 \text{ și } \sum_{G_1} P_j = 1$$

și valorile P_j satisfac următorul sistem de ecuații

$$P_j = p^2 P_{j-2} + 2pq P_j + q^2 P_{j+2} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2a)$$

unde $P_{2a+1} = P_1$ și $P_0 = P_{2a}$. De aici rezultă

$$P_j = \frac{1}{2a} \text{ pentru orice } j.$$

b) Distribuția staționară este $P_j^* = 1/2a$, $(j = 1, 2, \ldots, 2a)$ și se obține din sistemul $P_k^* = \sum_j P_j^* \cdot p_{jk}$ care în cazul de față este

$$P_j^* = pP_{j-1}^* + qP_{j+1}^* \quad (j = 1, 2, \ldots, 2a)$$

unde

$$P_{2a+1}^* = P_1^* \text{ și } P_0^* = P_{2a}^*. \text{ Avem } P_j^* = \frac{1}{2} P_j.$$

10. *Să considerăm un lanț Markov, definit prin probabilitățile de trecere:*

$$P_{jk} = \begin{cases} \neq 0 \text{ dacă } |j-k| = 1, \\ 0 \text{ dacă } |j-k| \neq 1, \end{cases} \tag{1}$$

unde $j, k = 0, 1, \ldots, s$.

Să se studieze comportarea asimptotică a probabilităților P_{jk}^n.

SOLUȚIE. Se știe că

$$\sum_{k=1}^{s} p_{jk} = 1$$

de unde rezultă că

$$p_{01} = p_{s,s-1} = 1.$$

După relația Chapman-Kolmogorov, avem

$$P_{jk}^{m+n} = \sum_{i=1}^{s} P_{ji}^m P_{ik}^n$$

și în particular, cum $P_{jk}^1 = p_{jk}$;

$$P_{jk}^{n+1} = \sum_{i=1}^{s} P_{ji}^n \cdot p_{ik} = \sum_{i=1}^{s} p_{ji} P_{ik}^n.$$

Avînd în vedere (1) rezultă că

$$P_{jk}^{n+1} = P_{j,k-1}^n \cdot p_{k-1,k} + P_{j,k+1}^n \cdot p_{k+1,k} = p_{j,j-1} P_{j-1,k}^n + p_{j,j+1} P_{j+1,k}^n,$$

dacă $1 \leqslant j, k \leqslant s-1$ și în plus

$$P_{j0}^{n+1} = P_{j1}^n \cdot p_{10}, \; P_{js}^{n+1} = P_{j,s-1}^n p_{s-1,s},$$

$$P_{0k}^{n+1} = p_{01} P_{1k}^n, \; P_{sk}^{n+1} = p_{s,s-1} \cdot P_{s-1,k}^n.$$

Din egalitățile de mai înainte rezultă

$$P_{jj}^2 = p_{j,j-1} p_{j-1,j} + p_{j,j+1} p_{j+1,j};$$

$$P_{j,j-2}^2 = p_{j,j-1} p_{j-1,j-2}; \; P_{j,j+2}^2 = p_{j,j+1} p_{j+1,j+2},$$

$$P_{jk}^2 = 0,$$

dacă

$$|j-k| \neq 0 \text{ și } |j-k| \neq 2.$$

Rezultă deci că pentru $n = 1$ sau $n = 2$, avem

$$P_{jk}^n = \begin{cases} 0 \text{ dacă } |j-k| \text{ este de paritate diferită de cea a lui } n, \\ \neq 0 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Ținînd seama de relația lui Chapman-Kolmogorov rezultă că această proprietate este adevărată pentru orice n.

În concluzie se poate spune că P_{jk}^n nu are o limită unică cînd $n \to \infty$.

11. *În cazul exemplului de mai înainte să presupunem că un sistem aleator S poate să treacă prin $s+1$ stări distincte $E_0, E_1, \ldots, E_s$. Să considerăm de asemenea un nou sistem S' care poate să treacă prin stările $E_0, E_2, \ldots, E_{2s}$, într-o succesiune de r experiențe; starea a m-a este constituită din experiența de ordin $2m-1$ și $2m$ făcute de sistemul S. Să notăm stările $E_0, E_2, \ldots, E_{2s}$, respectiv prin $E'_0, E'_1, \ldots, E'_{2s}$.*

Probabilitatea ca în m probe S' să treacă din starea E'_j în starea E'_k este dată de

$$w_{jk}^m = P_{2j,2k}^{2m}$$

și avem

$$w_{jk}^1 \neq 0, \text{ dacă } j-k = \pm 1 \text{ sau } j-k = 0.$$

Se cere:

a) *să se arate că* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [P_{jk}^0 + \ldots + P_{jk}^{n-1}]$ *există și este independentă de* j;

b) *să se calculeze efectiv limita.*

SOLUȚIE. a) Sîntem în cazul unui lanț Markov și știm că

$$\lim_{m\to\infty} w_{jk}^m = w_k.$$

Am arătat că

$$\lim_{n\to\infty} P_{2j,2k}^n = w_k.$$

Considerînd în loc de starea $E'_j = E_{2j}$ starea $E''_j = E_{2j+1}$ se poate arăta ca

$$\lim_{n\to\infty} P_{2j+1,2k+1}^n = w''_k.$$

Rezultă că, pentru n tinzînd spre infinit prin valori pare

$$\lim_{n\to\infty} P_{jk}^n = w_{jk} = \begin{cases} w_k \text{ dacă } j \text{ și } k \text{ sînt numere pare,} \\ w''_k \text{ dacă } j \text{ și } k \text{ sînt numere impare,} \\ 0 \text{ dacă } |j-k| \text{ este impar,} \end{cases}$$

iar pentru $n \to \infty$ prin valori impare, P_{jk}^n tinde către o limită w'_{jk} legată de w_{jk} prin relația

$$w'_{jk} = w_{j,k-1} \cdot p_{k-1,k} + w_{j,k+1} \cdot p_{k+1,k}.$$

Avem

$$w'_{jk} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } |j-k| \text{ este par,} \\ \neq 0 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Am arătat deci că P_{jk}^n este o funcție de n asimptotică periodică și că perioada sa este egală cu 2.

Să calculăm acum limitele w_{jk} și w'_{jk}.

Pentru calculul primei limite să facem pe $m \to \infty$ în relația

$$P_{jk}^{2m+2} = \sum_i P_{ji}^{2m} P_{ik}^2$$

iar pentru cea de a doua în relația

$$P_{jk}^{2m+1} = \sum_i P_{ji}^{2m-1} P_{ik}^2.$$

Deci $w_{j0}, \ldots, w_{js}$ și $w'_{j0}, \ldots, w'_{js}$ constituie două mulțimi de valori care satisfac sistemul de ecuații

$$\sum z_k = 1$$

$$z_k = \sum_i z_i P_{ik}^2 ; k = 0, 1, 2, \ldots, s$$

ultimele fiind formate din sistemul

$$\begin{cases} z_0 = z_0 P_{00}^2 + z_2 \cdot P_{20}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{2h} = z_{2h-2} P_{2h-2,2h}^2 + z_{2h} P_{2h,2h}^2 + z_{2h+2} P_{2h+2,2h}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{2s'} = z_{2s'-2} P_{2s'-2,2s'}^2 + z_{2s'} P_{2s'2s'}^2 \end{cases} \tag{1}$$

și din sistemul

$$\begin{cases} z_1 = z_1 P_{11}^2 + z_3 P_{31}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{2h+1} = z_{2h-1} P_{2h-1,2h+1}^2 + z_{2h+1} P_{2h+1,2h+1}^2 + z_{2h+3} P_{2h+3,2h+1}^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{2s'+1} = z_{2s'-1} P_{2s'-1,2s'+1}^2 + z_{2s'+1} P_{2s'+1,2s'+1}^2. \end{cases} \tag{2}$$

Cum însă $w_{jk} = 0$ dacă $j - k$ este impar și $w'_{jk} = 0$ dacă $j - k$ este par, se observă că relația $\sum_k z_k = 1$ devine $\sum_h z_{2h} = 1$ și este verificată de w_{jk} pentru j par și $k = 2h$.

Atunci pentru $k = 2h$ avem $w_{jk} = 0$ dacă j este impar și dacă $j = 2l$ avem $w_{jk} = z_{2l}$, unde z_{2l} este soluția sistemului format din ecuațiile (2) și ecuația $\sum_h z_{2h} = 1$.

Însă sistemul format din ecuațiile (2) și ecuația $\sum_h z_{2h} = 1$ admite un sistem unic de soluții

$$z_0 = u_0, \; z_2 = u_1, \ldots, z_{2s'} = u_{s'}.$$

Pe de altă parte pentru $k = 2h$ avem $w'_{jk} = 0$ dacă j este par; w'_{jk} fiind soluția aceluiași sistem considerat în cazul în care j este impar.

Avem deci, pentru $k = 2h$

$$w_{j,2h} = \begin{cases} u_h \text{ dacă } j \text{ este par,} \\ 0 \text{ dacă } j \text{ este impar.} \end{cases}$$

$$w'_{j,2h} = \begin{cases} u_h \text{ dacă } j \text{ este impar,} \\ 0 \text{ dacă } j \text{ este par.} \end{cases}$$

Se poate arăta, în mod analog, că pentru $k = 2i + 1$, există o mulțime de numere v_i astfel încît

$$w_{j,2i+1} = \begin{cases} v_i \text{ dacă } j \text{ este impar,} \\ 0 \text{ dacă } j \text{ este par.} \end{cases}$$

$$w'_{j,2i+1} = \begin{cases} v_i \text{ dacă } j \text{ este par,} \\ 0 \text{ dacă } j \text{ este impar.} \end{cases}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [P^0_{jh} + \ldots + P^{n-1}_{jk}] = \frac{1}{2} (w_{jk} + w'_{jk}) = \pi_{jk};$$

deci P^n_{jk} converge în medie.

În plus se vede că pentru $k = 2h$ sau $k = 2i + 1$ avem

$$\pi_{jk} = \frac{1}{2} \cdot u_h$$

respectiv

$$\pi_{jk} = \frac{1}{2} \cdot v_i$$

oricare ar fi valoarea j, deci limita în medie a lui π_{jk} este independentă de j; o vom nota prin π_k.

b) Pentru a calcula această limită în medie să calculăm mai întîi pe w_{jk} și w'_{jk}. Să observăm că

$$\begin{cases} \pi_k = \pi_{k-1} p_{k-1,k} + \pi_{k+1} p_{k+1,k}, & 1 \leqslant k \leqslant s-1, \\ \pi_0 = \pi_1 p_{10}; \quad \pi_s = \pi_{s-1} p_{s-1,s}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\sum_k \pi_k = 1.$$

Atunci

$$w_{jk} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } |j-k| \text{ este impar,} \\ 2\pi_k \text{ dacă } |j-k| \text{ este par,} \end{cases}$$

$$w'_{jk} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } |j-k| \text{ este par,} \\ 2\pi_k \text{ dacă } |j-k| \text{ este impar.} \end{cases}$$

Ecuațiile (3) ne permit să determinăm cu ușurință valorile π_k, calculînd succesiv $\pi_1, \pi_2, \ldots$ în funcție de π_0 și apoi găsind pe π_0 din relația $\sum_k \pi_k = 1$.

Pentru simplificarea scrierii să punem

$$p_k = p_{k,k+1}, \quad q_k = p_{k,k-1} = 1 - p_k,$$
$$p_0 = 1, \quad q_s = 1.$$

Atunci din (3) rezultă

$$\pi_1 q_1 = \pi_0, \quad \pi_2 q_2 q_1 = \pi_0 p_1, \ldots$$

și se verifică cu ușurință că avem

$$\pi_r q_r \cdot q_{r-1} \cdots q_1 = \pi_0 \cdot p_1 p_2 \cdots p_{r-1},$$
$$\pi_{s-1} \cdot q_{s-1} \cdot q_{s-2} \cdots q_1 = \pi_0 \cdot p_1 \cdots p_{s-2},$$
$$\pi_s \cdot q_s \cdot q_{s-1} \cdots q_1 = \pi_0 \cdot p_1 \cdots p_{s-1}.$$

Pe de altă parte

$$q_s \cdot \ldots \cdot q_1 = \sum_j q_s \cdots q_{j+1} \cdot \pi_j \cdot q_j \cdots q_1 =$$
$$= \pi_0 \sum_j q_s \cdot \ldots \cdot q_{j+1} \cdot p_{j-1} \cdot p_{j-2} \cdots p_1.$$

Determinînd pe π_0 din această ultimă relație, rezultă

$$\pi_r = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_r} = \frac{q_s \cdots q_1}{\sum_j q_s \cdots q_{j+1} p_{j-1} \cdots p_1},$$

sau ținînd seama că $p_0 = 1$, avem

$$\pi_r = \frac{\frac{p_0}{q_1}\frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_{r-1}}{q_r}}{1 + \frac{p_0}{q_1} + \frac{p_0}{q_1}\cdot\frac{p_1}{q_2} + \ldots + \frac{p_0}{q_1}\cdot\frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_{j-1}}{q_j} + \ldots + \frac{p_0}{q_1}\frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_{s-1}}{q_s}}$$

Observația. 1) Un caz interesant este acela pentru care

$p_{j-1} = q_j$ adică $p_{j-1,j} = p_{j,j-1}$, pentru $1 \leqslant j - 1, j + 1 \leqslant s$.

În acest caz

$$\pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_{s-1}.$$

Dacă în plus $p_{10} = \frac{1}{2} = p_{s-1,s}$ avem

$$\pi_r = \frac{1}{s}, \quad 1 \leqslant r \leqslant s - 1$$

$$\pi_0 = \pi_s = \frac{1}{2s}.$$

2) Un alt caz interesant este acela pentru care

$$q_k = p_{k,k-1} = \frac{k}{T}.$$

Atunci

$$\frac{p_{k-1}}{q_k} = \frac{T-k+1}{k}$$

și deci

$$\pi_r = \frac{\frac{T}{1}\cdot\frac{T-1}{2}\cdots\frac{T-r+1}{r}}{1+\frac{T}{1}+\frac{T}{1}\cdot\frac{T-1}{2}+\ldots+\frac{T}{1}\cdot\frac{T-1}{2}\cdots\frac{1}{T}} = \frac{C_T^r}{1+C_T^1+C_T^2+\ldots+C_T^{T-1}+1}$$

sau

$$\pi_r = C_T^r\cdot\frac{1}{2^T}.$$

12. *Fie $f_n^{(k)} = 1$, dacă la momentul $t = n$, unde $n = 0, 1, \ldots$ un sistem aleator se află în starea A_k și $f_n^{(k)} = 0$ dacă la momentul $t = n$ sistemul se află în starea A_j, unde $j \neq k$. Să notăm*

$$g_n^{(k)} = f_0^{(k)} + f_1^{(k)} + \ldots + f_n^{(k)}.$$

Să se arate că

$$\frac{g_n^{(k)}}{n}$$

converge în probabilitate către p_k, unde

$$p_k = \lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(n)};\ k = 1, 2, \ldots N.$$

SOLUȚIE. Variabilele aleatoare $f_n^{(k)}$, $n = 0, 1, \ldots$ formează un lanț Markov staționar avînd probabilitățile de trecere $P_{jk}^{(n)}$ iar probabilitățile inițiale p_j. Atunci

$$M(g_n^{(k)}) = P_k(n)$$

unde

$$P_k(n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}^{(n)}.$$

Abaterea medie pătratică a variabilei $g_n^{(k)}$ este dată de

$$D(g_n^{(k)}) = \sqrt{P_k(n)\,(1 - P_k(n))}.$$

În plus, să observăm că

$$M(g_n^{(k)}\cdot g_{n+r}^{(k)}) - M(g_n^{(k)})\,M(g_{n+r}^{(k)}) = P_k(n)\,[P_{kk}^{(k)} - P_k^{(n+r)}].$$

Cum lanțul este ergodic rezultă că

$$|P_{kk}^{(r)} - P_k| \leqslant (1-d)^{r-1}$$

unde

$$d = \operatorname{Min} P_{jk}$$

iar

$$P_k(m) - P_k = \sum_{j=1}^{N} p_j (P_{jk}^{(m)} - P_k).$$

Atunci

$$|P_k^{(m)} - P_k| \leqslant (1-d)^{m-1}$$

și în sfîrșit

$$|M(g_n^{(k)} \cdot g_{n+r}^{(k)}) - M(g_n^{(k)}) \cdot M(g_{n+r}^{(k)})| \leqslant 2(1-d)^{r-1}.$$

Notînd cu $R(g_n^{(k)}, g_{n+r}^{(k)})$ coeficientul de corelație, rezultă

$$|R(g_n^{(k)}, g_{n+r}^{(k)})| \leqslant C(1-d)^r$$

unde $C > 0$ este o constantă.

Ținînd seama de teorema lui Bernstein, referitoare la legea numerelor mari pentru variabile dependente, avem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{g_n^{(k)}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} P_k(n) = P_k.$$

13. *Fie $\nu^{(k)}$ variabila aleatoare care ne arată după cîți pași un sistem aleator revine prima dată în starea A_k, dacă la momentul $t = 0$ a fost în starea A_k. Să se arate că*

$$P(\nu^{(k)} > n) \leqslant (1-d)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

unde

$$d = \operatorname{Min} P_{jk}.$$

SOLUȚIE. Vom dovedi proprietatea cerută prin inducție. Avem

$$P(\nu^{(k)} > 1) = 1 - P_{kk} \leqslant 1 - d.$$

Să o presupunem verificată pentru n. Însă

$$P(\nu^{(k)} > n) = \sum_{j\neq k} P(\nu^{(k)} > n, \xi_n = j)$$

cum se constată cu ușurință. Atunci

$$P(\nu^{(k)} \geqslant n+1) = \sum_{h\neq k} \sum_{j\neq k} P(\nu^{(k)} > n, \xi_n = j, \xi_{n+1} = h) =$$

$$= \sum_{j\neq k} P(\nu^{(k)} > n, \xi_n = j) \sum_{h\neq k} P_{jh},$$

de unde

$$P(\nu^{(k)} > n+1) \leqslant (1-d) \sum_{j\neq k} P(\nu^{(k)} > n, \xi_n = j) \leqslant (1-d)^{n+1}$$

ceea ce trebuie arătat.

14. *Într-un lichid dintr-un vas studiem particulele care realizează o mișcare browniană. Delimităm o parte din vas și cercetăm numărul particulelor care se află în acea parte la momentele $t = 0, 1, 2, \ldots, n$; să notăm aceste numere cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.*

Presupunem că probabilitatea ca o particulă să iasă din partea delimitată în unitatea de timp, este egală cu α, iar probabilitatea ca să intre în partea delimitată în aceeași unitate de timp m particule este $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Se cere să se scrie probabilitățile de trecere, probabilitățile absolute și $\lim_{n\to\infty} P_k^{(n)}$.

SOLUȚIE. În acest caz probabilitățile de trecere vor fi

$$p_{jk} = P(\xi_{n+1} = k \mid \xi_n = j) = \sum_{h}^{\min(j,k)} C_j^h \alpha^{j-h} (1-\alpha)^h \frac{\lambda^{k-h}}{(k-h)!} e^{-\lambda}.$$

Dacă se notează cu $p_k(n)$ probabilitatea ca la momentul $t = n$ să avem în porțiunea respectivă k particule, atunci

$$p_k(n) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(n-1)} p_{jk}. \tag{1}$$

În acest exemplu teorema lui Markov nu se aplică, deoarece numărul stărilor este infinit. Se demonstrează o teoremă mai generală care ne arată că

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Introducînd notația

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

din (1) avem

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} z^k \right).$$

Ținînd seama de expresia lui p_{jk} obținem

$$G(z) = e^{\lambda(z-1)} G[1 + (1-\alpha)(z-1)] \tag{2}$$

deoarece

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} z^k = [\alpha + (1-\alpha) \cdot z]^j \cdot e^{\lambda(z-1)}$$

Înmulțind (2) cu $e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(z-1)}$ și introducînd notația

$$H(z) = G(z) \cdot e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(z-1)}$$

urmează că

$$H(z) = H[1 + (1-\alpha)(z-1)]; \quad H(z) = H[1 + (1-\alpha)^n (z-1)]$$

și cum membrii șirului $1 + (1 - \alpha)^n (z - 1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sînt toți în cercul unitate și $\lim_{n\to\infty} [1 + (1 - \alpha)^n \cdot (z - 1)] = 0$, avînd în vedere continuitatea lui $H(z)$ în $z = 1$, obținem că $H(z) = H(1) = G(1) = 1$; deci singura soluție a ecuației funcționale este

$$G(z) = e^{\frac{\lambda}{\alpha}(z-1)}$$

și astfel și distribuția limită $(\lim_{n\to\infty} p_k(n) = p_k)$ este o distribuție Poisson cu valoarea medie $\frac{\alpha}{n}$. Distribuția Poisson este în acest caz în mod natural staționară.

15. *Mișcarea unei particule în prezența barierelor reflectoare.*

Fie o particulă aleatoare pe axa x^{-1or}. Pe axa x^{-1or} există bariere reflectoare în punctele $x = \frac{1}{2}$ și $x = a + \frac{1}{2}$. Fie stările posibile ale sistemului $E_1, E_2, \ldots, E_a$, unde E_j corespunde la prezența particulei în punctul $x = j$. Dacă $2 \leqslant j \leqslant a - 1$, particula poate trece din starea E_j în starea E_{j-1} sau în E_{j+1}, din E_1 poate trece în E_2, sau poate rămîne în E_1 și similar din E_a în E_{a-1} sau poate rămîne în E_a. Probabilitățile de trecere sînt

$$p_{11} = q, \quad P_{aa} = p$$

și

$$p_{j,j+1} = p, \quad p_{j,j-1} = q, \quad (p + q = 1).$$

Se cere:

a) *să se determine distribuția limită* $\{P_j\}$;

b) *să se determine probabilitățile de trecere* $p_{ik}^{(n)}$.

SOLUȚIE. a) Acesta este un lanț Markov ergodic și distribuția $\{P_j\}$ va fi soluția următorului sistem de ecuații liniare

$$\begin{aligned} &qP_1 + qP_2 = P_1, \\ &pP_{j-1} + qP_{j+1} = P_j, \quad (j = 2, 3, \ldots, a - 1) \\ &pP_{a-1} + pP_a = P_a. \end{aligned}$$

Aici $P_j = \frac{p}{q} \cdot P_{j-1}$, unde

$$P_j = \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} P_1, \ (j = 1, 2, \ldots, a).$$

P_1 este determinat din condiția $\sum_{j=1}^{a} P_j = 1$.

În final avem

$$P_j = \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^a} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}, \quad (j = 1, 2, \ldots, a)$$

dacă $p \neq q$ și $P_j = \frac{1}{a}$, $(j = 1, 2, \ldots, a)$ dacă $p = q = \frac{1}{2}$.

b) Probabilitățile de trecere după n pași $p_{ik}^{(n)}$ pot fi determinate după cum urmează

Valorile proprii ale matricei π sînt

$$\lambda_j = .2\,(pq)^{1/2} \cos\frac{\pi j}{a}, \quad (j = 1, 2, \ldots, a-1) \text{ și } \lambda_0 = 1,$$

și elementele matricei $\|\alpha_{ij}\|$ și $\|\beta_{jk}\|$ care sînt construite respectiv din vectorii proprii la dreapta și la stînga sînt:

$$\alpha_{ij} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i/2} \sin\frac{\pi jk}{a} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{i+1}{2}} \sin\frac{\pi\,(i-1)j}{a}, \quad (j = 1, 2, \ldots, a-1)$$

și $\alpha_{i0=1}$

$$\beta_{jk} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k/2} \sin\frac{\pi jk}{a} - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sin\frac{\pi j\,(k-1)}{a}, \quad (j = 1, 2, \ldots, a-1)$$

și $\beta_{k0} = \left(\frac{p}{q}\right)^k$.

Avem

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^{a-1} C_j\, \lambda_j^n\, \alpha_{ij}\, \beta_{jk},$$

unde

$$C_j = \frac{2p}{a\left[1 - 2\,(pq)^{1/2} \cos\frac{\pi j}{a}\right]}, \quad (j = 1, 2, \ldots, a-1)$$

și

$$C_0 = \begin{cases} \frac{q}{p} \cdot \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n} & \text{dacă } p \neq q, \\ \frac{1}{a} & \text{dacă } p = q. \end{cases}$$

16. *O mașină îndeplinește într-o zi un număr limitat de operații constînd în producerea unei anumite piese, pentru o linie de montare.*

Să presupunem că mașina poate avea următoarele două stări de neperfectă eficiență :

1) *starea A în care poate încă să continue activitatea ;*

2) *starea B, în care poate trece numai din starea A și în care nu mai poate să-și continue activitatea.*

Să presupunem de asemenea că pentru a repune în bună funcționare mașina cînd ea se află în starea A se pierde un timp necesar producerii unei piese, în timp ce dacă mașina se află în starea B ea poate fi pusă în funcțiune numai a doua zi.

În funcție de numărul N de piese ce trebuie încă produse în ziua respectivă se pot da diverse directive, în ipoteza că mașina este eficientă :

(I) *cînd mașina intră în starea A se trece la repararea ei.*

(II) *se continuă producția pînă la sfîrșitul zilei de muncă cu excepția intrării mașinii în starea B.*

Fie a probabilitatea ca mașina din starea eficientă să intre în starea A și fie b probabilitatea că din starea A să treacă în starea B.

Să se studieze care este cea mai bună alternativă.

SOLUȚIE. Cele două directive formează două lanțuri Markov cu următoarele 3 stări :

S_1 : mașina este eficientă,

S_2 : mașina e în starea A,

S_3 : mașina e în starea B.

În cazul directivei (I) avem următoarea matrice a probabilităților de trecere (în care lipsește starea S_3)

$$\pi_1 = \begin{Vmatrix} 1-a & a \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

iar în cazul directivei (II)

$$\pi_2 = \begin{Vmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Pentru a confrunta cele două directive trebuie să calculăm numărul mediu de piese ce pot fi produse în cele N intervale disponibile pornind cu mașina în stare de eficiență. Dacă N nu este prea mare soluțiile stabile nu pot fi utile.

Să considerăm acum ecuația

$$\begin{Vmatrix} p_{11}-m & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-m & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-m \end{Vmatrix} = 0,$$

pe care o vom numi și ecuația „seculară".

În cazul directivei (I) ecuația seculară devine

$$\begin{Vmatrix} 1-a-m & a \\ 1 & -m \end{Vmatrix} = 0$$

care are ca soluții

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -a.$$

Se pot considera sistemele

$$\sum_{i=1}^{3} p_{ij}\, x_i = m_r\, x_j, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij}\, y_j = m_r\, y_i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Să notăm cu

$$x_1(r), \quad x_2(r), \quad x_3(r)$$

$$y_1(r), \quad y_2(r), \quad y_3(r)$$

soluțiile respective.

Să reamintim acum cîteva proprietăți ale probabilităților de trecere în cazul a 3 stări.

Dacă $m_1 = 1$ atunci

$$x_i(1) = p_i,$$
$$y_i(1) = 1$$

așa cum se verifică imediat.

Dacă sumez (1) după j obțin

$$\sum_{j=1}^{3} x_i(r) = m_r \sum_{j=1}^{3} x_j(r)$$

de unde rezultă că pentru $r \neq 1$ și $m_r \neq 1$, unde cu m_r am notat rădăcinile ecuației seculare, trebuie să avem

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(r) = 0$$

și deci

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(r) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } r = 1, \\ 0 \text{ pentru } r \neq 1. \end{cases}$$

Se poate arăta (rezultă cu ușurință) că

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(r) \cdot y_i(s) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } r = s, \\ 0 \text{ dacă } r \neq s. \end{cases}$$

$$\sum_{r=1}^{3} x_i(r)\; y_j(r) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j, \\ 0 \text{ dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Să notăm acum

$$d_{ij}^{(r)} = y_i(r) \cdot x_j(r)$$

cu care se pot defini matricele $D^{(r)}$:

$$\left\| \begin{matrix} d_{11}^{(r)} & d_{12}^{(r)} & d_{13}^{(r)} \\ d_{21}^{(r)} & d_{22}^{(r)} & d_{23}^{(r)} \\ d_{31}^{(r)} & d_{32}^{(r)} & d_{33}^{(r)} \end{matrix} \right\|.$$

Aceste matrice sînt foarte utile în aplicații, deoarece există următoarele relații

$$P = \sum_{r=1}^{3} m_r \cdot D^{(r)},$$

$$P^2 = \sum_{r=1}^{3} m_r^2 \cdot D^{(r)},$$

$$P^3 = \sum_{r=1}^{3} m_r^3 \cdot D^{(r)},$$

. . . . . .

unde am notat matricea $p_{ij}^{(n)}$ cu P^n.

Pentru determinarea relațiilor de mai înainte este suficient să arătăm că

$$P_{ij} = \sum_{r=1}^{3} m_r \, d_{ij}^{(r)}.$$

Avem din relațiile de mai înainte

$$\sum_{r=1}^{3} m_r \cdot d_{ij}^{(r)} = \sum_r m_r y_i(r) \cdot x_j(r) = \sum_r \sum_s P_{is} \cdot y_s(r) \cdot x_j(r) =$$

$$= \sum_s P_{is} \sum_r y_s(r) \cdot x_j(r) = P_{ij}.$$

Astfel

$$P_{ij}(r) = \sum_s P_{is} \, P_{sj} = \sum_s \left[\sum_r m_r \, y_i(r) \, x_s(r)\right] \cdot \left[\sum_t m_t \cdot y_s(t) \, x_j(t)\right] =$$

$$= \sum_r \sum_t m_r \cdot m_t \, y_i(r) \, x_j(t) \sum_s x_s(t) \, y_s(t) =$$

$$= \sum_r m_r^2 \cdot y_i(r) \cdot y_j(r) = \sum_r m_r^2 \cdot d_{ij}^{(r)}$$

și analog se stabilesc și celelalte relații.

În cazul exemplului nostru avem

$$x_1(1) = \frac{1}{1+a}, \qquad x_2(1) = \frac{a}{1+a},$$
$$x_1(2) = 1, \qquad x_2(2) = -1,$$
$$y_1(1) = 1, \qquad y_2(1) = 1,$$
$$y_1(2) = \frac{a}{1+a}, \qquad y_2(2) = -\frac{1}{1+a},$$

de unde rezultă că

$$D^{(1)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+a} & \frac{a}{1+a} \\ \frac{1}{1+a} & \frac{a}{1+a} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+a} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{vmatrix},$$

$$D^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{1+a} & -\frac{a}{1+a} \\ -\frac{1}{1+a} & \frac{1}{1+a} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+a} \begin{vmatrix} a & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

și deci

$$P^n = \frac{1}{1+a} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} + \frac{(-a)^n}{1+a} \begin{vmatrix} a & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă că

$$P_{11}(n) = \frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}.$$

Pe de altă parte, în cazul directivei (1) mașina produce numai dacă este eficientă, numărul mediu de piese produse este dat de suma lui $P_{11}(n)$ pentru $0 \leqslant n \leqslant N-1$, unde $P_{11}(0) = 1$, adică

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a} = \frac{N}{1+a} + a\,\frac{1-(-a)^N}{(1+a)^2}.$$

Pentru directiva (II) avem

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1-a, \quad m_3 = 1-b$$

și deci

$$x_1(1) = 0, \qquad x_2(1) = 0, \qquad x_3(1) = 1,$$
$$x_1(2) = 1, \qquad x_2(2) = \frac{-a}{a-b}, \qquad x_3(2) = \frac{b}{a-b},$$
$$x_1(3) = 0, \qquad x_2(3) = 1, \qquad x_3(3) = -1,$$

$$y_1(1) = 1, \qquad y_2(1) = 1, \qquad y_3(1) = 1,$$
$$y_1(2) = 1, \qquad y_2(2) = 0, \qquad y_3(2) = 0,$$
$$y_1(3) = \frac{a}{a-b}, \qquad y_2(3) = 1, \qquad y_3(3) = 0,$$

de unde rezultă

$$D^{(1)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad D^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{-a}{a-b} & \frac{b}{a-b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{a}{a-b} & \frac{-a}{a+b} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

și deci

$$P^n = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} + (1-a)^n \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \frac{-a}{a-b} & \frac{b}{a-b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + (1-b)^n \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \frac{a}{a-b} & \frac{-a}{a-b} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Putem scrie

$$P_{11}(n) = (1-a)^n$$

$$P_{12}(n) = a \cdot \frac{(1-b)^n - (1-a)^n}{a-b}$$

iar valoarea medie a pieselor produse este dată de

$$\sum_{n=0}^{N-1} P_{11}(n) + P_{12}(n) = \sum_{n=0}^{N-1} (1-a)^n + \frac{a}{a-b}\left[(1-b)^n - (1-a)^n\right] =$$

$$= \frac{a^2\left[1-(1-b)^N\right] - b^2\left[1-(1-b)^N\right]}{ab(a-b)}.$$

Pentru $N = 2$, cele două directive dau următoarele valori medii ale pieselor produse:

$$\text{(I)} \quad \frac{2}{1+a} + a\,\frac{1-a^2}{(1+a)^2} = \frac{2+3a-a^3}{(1+a)^2},$$

$$\text{(II)} \quad \frac{a^2\left[1-(1-b)^2\right] + b^2\left[1-(1-a)^2\right]}{ab(a-b)} = 2,$$

de unde rezultă că (pentru $a > 0$) cea de a doua directivă este de preferat primei.

17. *Fie*

$$P_{jk}^{(-n)} = P(\xi_m = k \mid \xi_{m+n} = j), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Se arată că

$$\lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(-n)} = P_{jk}^*$$

există și că P_{jk}^* *formează o matrice stochastică.*

SOLUȚIE. Avem

$$P_{jk}^{(-n)} = \frac{P(\xi_m = k,\ \xi_{m+n} = j)}{P(\xi_{m+n} = j)} = \frac{P(\xi_{m+n} = j \mid \xi_m = k) \cdot P(\xi_m = k)}{P(\xi_{m+n} = j)}.$$

și de aici

$$\lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(-n)} = \frac{P_k \cdot P_{kj}}{P_j} = P_{jk}^*.$$

În consecință

$$\sum_{k=1}^{N} P_{jk}^* = \frac{1}{P_j} \sum_{k=1}^{N} P_k P_{kj}.$$

Însă

$$\sum_{k=1}^{N} P_k P_{kj} = P_j$$

și deci

$$\sum_{k=1}^{N} P_{jk}^* = 1.$$

Rezultă că P_{jk}^* formează o matrice stochastică.

18. *Să se arate că lanțurile Markov multiple de ordinul k sînt reversibile cu păstrarea ordinului.*

SOLUȚIE. Să presupunem $k = 2$, pentru simplificarea scrierii. Fie $E_{l_n}^n$ $(n = 1, 2, \ldots ;\ l_n = 1, 2, \ldots, m)$ o succesiune de evenimente în lanț Markov dublu.

Ținînd seama că avem un lanț dublu, putem scrie

$$P(E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+3}}^{n+3}) =$$

$$= P(E_{l_n}^n) \cdot P_{E_{l_n}^n}(E_{l_{n+1}}^{n+1})\, P_{E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_{n+2}}^{n+2})\, P_{E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+3}}^{n+3})$$

și în același timp

$$P(E_{l_n}^n \cap E_{l_{n+1}}^{n+1} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+3}}^{n+3}) =$$

$$= P(E_{l_{n+3}}^{n+3}) \cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}(E_{l_{n+2}}^{n+2}) \cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}(E_{l_{n+1}}^{n+1}) \cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3} \cap E_{l_{n+2}}^{n+2} \cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}(E_{l_n}^n).$$

Putem scrie deci că

$$P\left(E_{l_{n+3}}^{n+3}\right)\cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)\cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)\cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_n}^{n}\right)=$$

$$=P\left(E_{l_n}^{n}\right)\cdot P_{E_{l_n}^{n}}\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)\cdot P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)\cdot P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}\left(E_{l_{n+3}}^{n+3}\right).$$

Analog găsim

$$P\left(E_{l_{n+3}}^{n+3}\right)\cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)\cdot P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)=$$

$$=P\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)\cdot P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)\cdot P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}}\left(E_{l_{n+3}}^{n+3}\right).$$

Împărțind ultimele două egalități membru cu membru, obținem

$$P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_n}^{n}\right)=$$

$$=P\left(E_{l_n}^{n}\right)\cdot P_{E_{l_n}^{n}}\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)\cdot P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)/P\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right). \tag{1}$$

Rezultă că membrul întîi al egalității de mai înainte nu depinde de $E_{l_{n+3}}^{n+3}$ și deci

$$P_{E_{l_{n+3}}^{n+3}\cap E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_n}^{n}\right)=P_{E_{l_{n+2}}^{n+2}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_n}^{n}\right)$$

de unde rezultă că procesul invers este un lanț Markov de ordinul al doilea. Să arătăm, în plus, că ordinul este efectiv doi. Este suficient să arătăm că membrul al doilea al relației (1) depinde efectiv de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$. Să presupunem că el nu depinde de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$. Dacă punem

$$P\left(E_{l_n}^{n}\right)\;P_{E_{l_n}^{n}}\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)=\lambda\,P\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)$$

și λ nu depinde de $E_{l_{n+2}}^{n+2}$; să însumăm în ambii membrii ai relației de mai înainte în raport cu l_{n+2}. Avem

$$P\left(E_{l_n}^{n}\right)\cdot P_{E_{l_n}^{n}}\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)=\lambda\;P\left(E_{l_{n+1}}^{n+1}\right)$$

și introducînd în relația precedentă, obținem

$$P_{E_{l_n}^{n}\cap E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right)=P_{E_{l_{n+1}}^{n+1}}\left(E_{l_{n+2}}^{n+2}\right).$$

Rezultă că lanțul direct este el însuși de ordinul întîi, în contradicție cu ipoteza.

19. *Să se arate că dacă* $\{\xi_t\}$ *este un proces Markov omogen și aditiv, care ia valori întregi nenegative, și dacă*

$$a)\ M(\xi_t) < \infty,$$

$$b)\ \xi_0 \equiv 0,$$

atunci

$$\xi_t = \sum_{n=1}^{\infty} n\ \xi_t^{(n)},$$

unde $\xi_t^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ *sînt variabile aleatoare care urmează fiecare cîte un proces Poisson, independent unul de altul.*

SOLUȚIE. Fie

$$P_n(t) = P(\xi_{t_0+t} - \xi_{t_0} = n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Atunci

$$P_n(t+s) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\ P_{n-k}(s).$$

Fie acum funcția generatoare

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot z^n,$$

Obținem imediat

$$G(z,\ t+s) = G(z, t) \cdot G(z, s).$$

Vom arăta că există un $S > 0$ astfel încît

$$G(z, t) \neq 0,$$

dacă $0 < t < S$ și $|z| \leqslant 1$. Pentru aceasta să arătăm mai întîi că există un număr $\lambda \geqslant 0$ încît $M(\xi_t) = \lambda t$, dacă $t \geqslant 0$.

Într-adevăr fie

$$M(\xi_t) = f(t),$$

atunci

$$f(t+s) = M(\xi_{t+s}) = M(\xi_{t+s} - \xi_s) + M(\xi_s)$$
$$= f(t) + f(s).$$

Cum $f(t)$ este o funcție monotonă necrescătoare rezultă că

$$f(t) = \lambda t, \quad \lambda > 0.$$

Dacă $\lambda = 0$ în acest caz cu probabilitatea 1 avem $\xi_t = 0$.
Fie, deci $\lambda > 0$, atunci

$$M(\xi_t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ P_n(t) = \lambda t.$$

Însă

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

și deci

$$\lambda t = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P_n(t) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t),$$

de unde

$$P_0(t) \geqslant 1 - \lambda t.$$

Dar atunci

$$|G(z, t)| \geqslant P_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)\,|z|^n \geqslant 2P_0(t) - 1 \geqslant 1 - 2\lambda t.$$

Fie $\delta = \frac{1}{2\lambda}$, atunci, dacă $0 < t < S$

$$|G(z, t)| > 0.$$

Cum

$$G(z, t) = \left(G\left(z, \frac{t}{k}\right)\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

rezultă

$$G(z, t) \neq 0$$

pentru orice $t > 0$.

Fie acum

$$g(z, t) = \lg G(z, t).$$

Funcția $G(z, t)$ este însă o funcție regulată (în raport cu z) dacă $|z| < 1$ și $G(z, t) \neq 0$. Atunci $g(z, t)$ este de asemenea o funcție regulată pentru $|z| < 1$.

Am văzut însă că

$$G(z, t + s) = G(z, t) \cdot G(z, s).$$

Din relația de mai înainte rezultă că

$$g(z, t + s) = g(z, t) + g(z, s).$$

Fie acum $z \in (0, 1)$. În acest caz

$$0 < G(z, s) < \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s) = 1$$

deci

$$G(z, t + s) < G(z, t)$$

sau $G(z, t)$ este o funcție monoton descrescătoare și deci și $g(z, t)$. De aici rezultă că

$$g(z, t) = a(z)\, t, \quad z \in (0, 1).$$

Fie

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Vom arăta că $c_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ și

$$c_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

adică

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z^n - 1).$$

Dacă $k = 1, 2, \ldots$ am văzut că

$$G(z, t) = \left(G\left(z, \frac{t}{k}\right)\right)^k$$

și de aici

$$ta(z) = k \lg G\left(z, \frac{t}{k}\right).$$

Deducem că

$$G\left(z, \frac{t}{k}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{t}{k}\right)(z^n - 1).$$

Însă

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{t}{k}\right)(z^n - 1)\right| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{t}{k}\right) \leqslant 2\left(1 - P_0\left(\frac{t}{k}\right)\right) \leqslant \frac{2\lambda t}{k}$$

deci

$$t \cdot a(z) = \lim_{k\to\infty} \lg G\left(z, \frac{t}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} k \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{t}{k}\right)(z^n - 1).$$

Însă

$$\left|k \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{t}{k}\right)(z^n - 1)\right| \leqslant 2\,\lambda t$$

și deci

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot P_n\left(\frac{t}{k}\right) = d_n(t)$$

există, și acum $P_n\left(\frac{t}{k}\right) \geqslant 0$, avem $d_n(t) \geqslant 0$.

Putem scrie

$$t \cdot a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(z)(z^n - 1)$$

de unde

$$tc_n = d_n(t)$$

sau

$$c_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

și

$$tc_0 = -t \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Rezultă că

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n - 1)$$

unde

$$c_n \geqslant 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

Atunci

$$G(z, t) = e^{t \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n - 1)} = \prod_{n=1}^{\infty} e^{t c_n (z^n - 1)}.$$

Se observă însă că

$$e^{c_n (z^n - 1) t}$$

este funcția generatoare a procesului $\{n\xi_t^{(n)}\}$ unde $\{\xi_t^{(n)}\}$ este un proces Poisson, pentru care $M(\xi_t^{(n)}) = \lambda_n \cdot t$ ceea ce trebuia arătat.

20. *Să împărțim un interval* $(0, a)$ *într-un număr de părți egale cu lungimea* h. *Să presupunem că pe segment se află o particulă care se deplasează fie spre dreapta, fie spre stînga cu distanța* h, *pe baza unui proces aleator. Dacă particula se află la un moment dat în punctul* x, *probabilitatea ca să meargă în punctul* $x + h$ (*adică la dreapta*) *este* p, *iar probabilitatea ca să meargă în punctul* $x - h$ (*adică la stînga*) *este* q. *Evident* $p + q = 1$. *Procesul aleator de mers la întîmplare se termină cînd particula ajunge într-unul din punctele* 0 *sau* a.

Să se determine ecuația corespunzătoare acestui proces.

SOLUȚIE. Fie $M(x)$ probabilitatea ca particula pornind din punctul x să ajungă în punctul a. Avem $M(0) = 0$, $M(a) = 1$.

Particula poate să ajungă în punctul a în două moduri incompatibile între ele:

— poate să facă un pas la dreapta și apoi din punctul $x + h$ să ajungă în a și aceasta cu probabilitatea

$$pM(x + h),$$

— poate să facă un pas la stînga și apoi din punctul $x - h$ să ajungă în a, cu probabilitatea

$$qM(x - h).$$

Rezultă că

$$M(x) = pM(x+h) + qM(x-h).$$

Cum $p + q = 1$, avem

$$(p+q)M(x) = pM(x+h) + qM(x-h),$$

care se mai poate scrie

$$q \cdot [M(x-h) + M(x+h) - 2M(x)] = (q-p)M(x+h) - (q-p)M(x)$$

sau

$$M(x+h) + M(x-h) - 2M(x) - \frac{q-p}{q}[M(x+h) - M(x)] = 0.$$

Împărțind cu h^2, obținem

$$\frac{M(x+h) + M(x-h) - 2M(x)}{h^2} - \frac{q-p}{hq}\left[\frac{M(x+h) - M(x)}{h}\right] = 0.$$

Să notăm

$$a = \frac{q-p}{h}$$

și să presupunem că p este o funcție de h astfel încît

$$\frac{q-p}{q} = ah + 0(h)$$

unde

$$\lim_{h\to 0} \frac{0(h)}{h} = 0.$$

Atunci făcînd pe $h \to 0$, obținem

$$\frac{d^2M}{dx^2} - a \cdot \frac{dM}{dx} = 0.$$

Cu alte cuvinte ecuația mersului la întîmplare pe segmentul $(0, a)$ este dată de o ecuație diferențială de ordinul al doilea, cu condițiile la limită

$$M(0) = 0, \quad M(a) = 1.$$

21. *Fie lanțul Markov cu stările* $E_0, E_1, \ldots, E_a$ *și probabilitățile de trecere* $p_{j,j+1} = 1 - \frac{j}{a}$, $p_{j,j-1} = \frac{j}{a}$.

Se cere:

a) *să se determine probabilitățile de trecere* $p_{ik}^{(n)}$;

b) *să se determine distribuția staționară* $\{P_j^*\}$.

SOLUȚIE. a) Lanțul este ireductibil și are perioada $t = 2$. În scopul obținerii probabilităților de trecere $p_{ik}^{(n)}$, se consideră forma canonică a matricei $\| p_{ik} \|$. Se consideră ecuația

$$y'\pi = \lambda y',$$

unde π este matricea probabilităților de trecere și

$$y' = \| \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_a \|.$$

Scriind ecuația în detaliu obținem

$$\frac{a-k+1}{a}\beta_{k-1} + \frac{k+1}{a}\beta_{k+1} = \lambda\beta_k, \quad (k = 0, 1, \ldots, a),$$

unde $\beta_{a+1} = \beta_{-1} = 0$. Se introduce funcția generatoare

$$U(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_a z^a.$$

Pentru aceasta avem

$$(1 - z^2)\ U'(z) + a(z - \lambda)\ U(z) = 0,$$

de unde

$$U(z) = A(1-z)^{\frac{a(1-\lambda)}{2}}(1+z)^{\frac{a(1+\lambda)}{2}},$$

unde A este o constantă. Dacă $U(z)$ este un polinom de gradul a, trebuie să avem $\lambda = 1 - \frac{2j}{a}\ (j = 0, 1, \ldots, a)$. Numerele $\lambda_j = 1 - \frac{2j}{a}, (j = 0, 1, \ldots, a)$ sînt valorile proprii ale lui π.

Fie $y_j' = \| \beta_{j0}, \beta_{j1}, \ldots, \beta_{ja} \|$ vectorul propriu la stînga corespunzător lui λ_j, atunci

$$\sum_{k=0}^{a} \beta_{jk} z^k = A_j (1-z)^j\ (1+z)^{a-j},$$

unde A_j este o constantă arbitrară pentru care va fi aleasă mai departe o valoare convenabilă.

Dacă vectorul propriu la dreapta corespunzătoare lui λ_j este

$$\alpha_j = \left\| \begin{matrix} \alpha_{0j} \\ \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{aj} \end{matrix} \right\|$$

și x_j este normat astfel ca $y_j' x_j = 1$ $(j = 0, 1, \ldots, a)$, atunci putem scrie

$$z^i = \sum_{k=0}^{a} \delta_{ik} z^k = \sum_{k=0}^{a} z^k \sum_{j=0}^{a} \alpha_{ij}\beta_{jk} = \sum_{j=0}^{a} \alpha_{ij} A_j (1-z)^j (1+z)^{a-j} =$$

$$= (1+z)^a \sum_{j=0}^{a} \alpha_{ij} A_j \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^j,$$

Făcînd substituția $\xi = (1 - z)/(1 + z)$ obținem

$$\sum_{j=0}^{a} \alpha_{ij} A_j \; \xi = \frac{(1 - \xi)^i (1 + \xi)^{a-i}}{2^a}.$$

Fie $A_j = \frac{1}{2^{a/2}}$. Aceasta arată că matricile $\| \alpha_{ij} \|$ și $\| \beta_{jk} \|$ coincid cu inversele lor. Dacă $H = \| \alpha_{ij} \|$, scriem

$$\pi = H \wedge H$$

unde

$$\sum_{j=0}^{a} \alpha_{ij} z^j = \frac{(1 - z)^i \; (1 + z)^{a-i}}{2^{a/2}}$$

și $\wedge$ este matricea diagonală cu elementele $\lambda_j = 1 - 2j/a$, $(j = 0, 1, \ldots, a)$.
Probabilitățile de trecere $p_{ik}^{(n)}$ pot fi obținute ca elemente ale matricei

$$\pi^n = H \wedge^n H.$$

b) Distribuția staționară se obține rezolvînd sistemul de ecuații

$$\begin{cases} P_j^* = \left(1 - \frac{j-1}{a}\right) P_{j-1}^* + \frac{j+1}{a} P_{j+1}^*, \; (j = 1, 2, \ldots, a - 1), \\ P_0^* = \frac{1}{a} P_1^*, \; P_a^* = \frac{1}{a} P_{a-1}^*, \\ \sum_{j=0}^{a} P_j^* = 1, \end{cases}$$

ceea ce dă

$$P_j^* = C_a^j \frac{1}{2^a}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, a)$$

22. *Fie lanțul Markov care are matricea probabilităților de trecere*

$$\pi = \begin{Vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} \\ p_{m-1} & p_0 & p_1 & \cdots & p_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_0 \end{Vmatrix}$$

unde $p_0 + p_1 + \ldots + p_m = 1$.
Se cere:
a) *să se determine* π^m ;
b) *să se arate că* $\lim_{n \to \infty} P_j(n) = \frac{1}{m}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

SOLUȚIE. a) Este cunoscut din teoria ciclică a determinanților că

$$|\pi - \lambda I| = \prod_{j=1}^{m} [\varnothing(\varepsilon_j) - \lambda],$$

unde

$$\varnothing(\varepsilon) = p_0 + p_1\varepsilon + \ldots + p_{m-1}\varepsilon^{m-1}$$

și

$$\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i(j-1)}{m}}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

sînt cele m rădăcini ale unității.

Aici $i = \sqrt{-1}$. Valorilor proprii ale matricii π sînt

$$\lambda_j = \varnothing(\varepsilon_j) = p_0 + p_1\varepsilon_j + \ldots + p_{m-1}\varepsilon_j^{m-1}, (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Dacă $A = \|\alpha_{ij}\|$, unde $\alpha_{ij} = \varepsilon_j^{i-1}$ și $B = \|\beta_{jk}\|$ în care $\beta_{jk} = \varepsilon^{-(k-1)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, atunci $\pi A = A\wedge$, $AB = m \cdot I$, iar $\wedge$ este matricea diagonală

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{matrix} \right\|.$$

Astfel

$$\pi = \frac{1}{m} A \wedge B$$

și consecutiv

$$\pi^n = \frac{1}{m} A \wedge^n B.$$

b) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \wedge^n = \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{matrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m^n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|,$$

deoarece o valoare proprie este egală cu 1; aceasta este λ_1, iar celelalte λ_j $(j = 2, \ldots, m)$ sînt în modul mai mici ca unitatea.

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \pi^n = \frac{1}{m} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Acest lanț Markov este ireductibil, ergodic și distribuția lui limită este $\{P_j\}$ $(P_j = 1/m, j = 1, 2, \ldots, m)$.

23. *Fie șirul de variabile aleatoare* $\{\xi_n\}$ *definite prin formula de recurență*

$$\xi_n = \begin{cases} \xi_{n-1} - k + \eta_{n-1} & \text{dacă } \xi_{n-1} \geqslant k, \\ \xi_{n-1} + \eta_{n-1} & \text{dacă } \xi_{n-1} < k, \end{cases}$$

unde k *este un întreg pozitiv fix și variabilele aleatoare* $\{\eta_n\}$ *sînt reciproc independente cu distribuția*

$$P\{\eta_n = \nu\} = C_m^\nu p^\nu (1-p)^{m-\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m).$$

Se cere:

a) *să se arate că șirul de variabile aleatoare* $\{\xi_n\}$ *formează un lanț Markov*;

b) *să se determine probabilitățile limită*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\} = P_j.$$

SOLUȚIE. Lanțul Markov este ireductibil, neperiodic și ergodic dacă sistemul de ecuații

$$P_j = \sum_i P_i p_{ij}, \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

are o soluție nebanală care formează o serie absolut convergentă.

Fie $\pi_\nu = C_m^\nu p^\nu \cdot q^{m-\nu}$ (unde $q = 1 - p$). Atunci $p_{ij} = \pi_{j-i+k}$ dacă $i \geqslant k$ și $p_{ij} = \pi_{j-i}$ dacă $i < k$. Conform lui (1) avem

$$P_j = \sum_{i=0}^{k-1} P_i \pi_{j-i} + \sum_{i=k}^{\infty} P_i \pi_{j-i+k}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Fie funcția generatoare

$$U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j$$

și

$$U_k(z) = \sum_{j=0}^{k-1} P_j z^j.$$

Obținem pentru $U(z)$ următoarea relație

$$U(z) = \frac{U_k(z) \cdot (z^k - 1)\ [1 + p(z-1)]^m}{z^k - [1 + p(z-1)]^m}.$$

Aparent această ecuație pare că nu determină probabilitățile P_j deoarece poate fi privită ca un polinom $U_k(z)$ de gradul $k - 1$ arbitrar.

Din condiția $U(1) = 1$ avem

$$1 = U_k(1) \cdot \frac{k}{k - mp}.$$

Aceasta arată că sistemul nu va fi ergodic dacă $k \leqslant mp$. În acest caz

$$\lim_{n\to\infty} P_j(n) = 0 \text{ pentru toți } j.$$

Dacă $mp < k$ vom arăta că $U(z)$ este unic determinată și că sistemul este ergodic. Aceasta se arată în felul următor. Raza de convergență a seriei de puteri ale lui $U(z)$ este cel puțin unu și astfel $U(z)$ este regulat în cercul unitate $|z| \leqslant 1$ din planul complex. Pe de altă parte, din teorema lui Rouché, rezultă că ecuația

$$z^k - [1 + p(z-1)]^m = 0$$

are exact $(k-1)$ rădăcini în interiorul cercului unitate.

Fie aceste rădăcini $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$. Cum $U(z)$ este regulată aceasta se poate întîmpla numai dacă $z_1 \ldots, z_{k-1}$ sînt rădăcini ale lui $U_k(z)$. Astfel toate rădăcinile polinomului $U_k(z)$ de gradul $k-1$ sînt cunoscute și de aceea $U_k(1) = 1 - \frac{mp}{k}$ determină $U_k(z)$ și $U(z)$ unic.

Deoarece seria lui $U(z)$ este absolut convergentă pentru $z = 1$ sistemul este ergodic și dezvoltarea lui $U(z)$ după puterile lui z furnizează probabilitățile P_j.

24. *Fie o particulă aleatoare pe axa x-lor, care are bariere de absorbție în punctele $x = 0$ și $x = a$. Fie stările posibile $E_0, E_1, \ldots, E_a$ unde E_j corespunde la prezența particolei în punctul $x = j$. Dacă $1 \leqslant j \leqslant a-1$ particula poate trece din E_j în una din stările E_{j+1} sau E_{j-1}, dar dacă ajunge în starea E_0 sau E_a ea rămîne pe loc. Presupunem că probabilitatile de trecere sînt $p_{00} = p_{aa} = 1$ și $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ unde $p + q = 1$. Presupunem că starea inițială este E_i $(i \neq 0,\ i \neq a)$ unde $P_i(0) = 1$ și $P_j(0) = 0$ dacă $j \neq i$.*

Se cere:

a) *să se determine* $P_k(n)$, $(k = 1, 2, \ldots, a-1)$;

b) să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = 0 \mid \xi_0 = j\} = \pi_j^*.$$

SOLUȚIE. a) Avem $P_k(n) = p_{ik}^{(n)}$. Considerăm matricea π^* cu $a-1$ linii și $a-1$ coloane

$$\pi^* = \begin{Vmatrix} 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 \end{Vmatrix},$$

care s-a obținut din matricea probabilităților de trecere π, prin suprimarea primei și ultimei linii și primei si ultimei coloane. În acest caz probabili-

tățile de trecere $p_{ik}^{(n)}$ $(1 \leqslant i,\ k \leqslant a-1)$ vor fi elementele matricei $(\pi^*)^n$. Găsim forma canonică a lui π^*. Considerăm ecuația

$$y'\pi^* = \lambda y'$$

unde $y' = \| \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_{a-1} \|$.

Scriind ecuația în detaliu, avem

$$p\beta_{k-1} + q\beta_{k+1} = \lambda\beta_k,\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1),$$

unde $\beta_a = \beta_0 = 0$. Soluția acesteia, este $\beta_k = A\omega_1^k + B\omega_2^k$, unde ω_1 și ω_2 sînt rădăcinile ecuației $q\omega^2 - \lambda\omega + p = 0$ [se știe că $q\omega_1\omega_2 = p$ și $\lambda = q(\omega_1 + \omega_2)$]. Datorită condiției $\beta_0 = 0$ și $\beta_a = 0$, avem $A + B = 0$ și $\omega_1^a = \omega_2^a$,

$$\omega_1 = \omega_2 e^{\frac{2\pi ij}{a}},\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1),$$

unde $i = \sqrt{-1}$ și deoarece $\omega_1\omega_2 = p/q$ urmează că

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p}{q}}\, e^{\frac{\pi ij}{a}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{p}{q}}\, e^{-\frac{\pi ij}{a}},\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1)$$

și valorile proprii ale lui π^* sînt

$$\lambda = q(\omega_1 + \omega_2) = 2\sqrt{pq} \cdot \cos\frac{\pi j}{a},\ (j = 1, 2,\ \ldots,\ a-1),$$

astfel

$$\beta_k = \beta_{kj} = A_j \left(\frac{p}{q}\right)^{k/2} \sin\frac{\pi jk}{a},\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1),$$

$$\lambda_j = 2\sqrt{pq}\cos\frac{\pi j}{a},\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1).$$

Similar, obținem că soluția lui $\pi^* x_j = \lambda_j x_j$, $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1)$ este

$$x_j = \begin{Vmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{a-1,\,j} \end{Vmatrix}$$

unde

$$\alpha_{ij} = B_j \left(\frac{q}{p}\right)^{i/2} \sin\frac{\pi ij}{a},\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1).$$

Acum avem

$$\frac{1}{c_j} = \sum_{\nu=1}^{a-1} \beta_{j\nu}\alpha_{\nu j} = A_j B_j \sum_{\nu=1}^{a-1} \sin\frac{\pi j\nu}{a} \sin\frac{\pi\nu j}{a} = A_j B_j \frac{a}{2}$$

și din

$$p_{ik}^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^m \alpha_{ij} \beta_{jk}$$

urmează că

$$p_{ik}^{(m)} = \frac{2^{n+1} p^{\frac{n+k-i}{2}} q^{\frac{n-k+i}{2}}}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \left(\cos \frac{\pi j}{a}\right) \cdot \sin \frac{\pi ij}{a} \sin \frac{\pi jk}{a}.$$

b) Pentru a determina probabilitățile de absorbție π_j^*, fie $C = \{E_0\}$ și $T = \{E_1, E_2, \ldots, E_{a-1}\}$. După

$$\pi_j^* = \sum_{E_\nu \in T} p_{j\nu} \pi_\nu^* + \sum_{E_k \in C} p_{jk}$$

avem

$$\begin{cases} \pi_1^* = p\pi_2^* + q \\ \pi_j^* = q\pi_{j-1}^* + p\pi_{j+1}^* \quad (j = 2, 3, \ldots, a-2) \\ \pi_{a-1}^* = q\pi_{a-2}^* \end{cases}$$

din care

$$\pi_j^* = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{p}{q}\right)^j}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}, \ (j = 1, 2, \ldots a-1)$$

dacă $p \neq q$ și $\pi_j^* = 1 - j/a$ dacă $p = q = \frac{1}{2}$.

25. *Să notăm cu $E_m(t)$ evenimentul care constă în producerea în intervalul t a m evenimente și cu*

$$p_m(t) = P(E_m(t))$$

probabilitatea corespunzătoare.

Să facem următoarele ipoteze:

a) *independența evenimentelor $E_m(t)$, $E_t(\Delta)$ în intervalele succesive $(0, t)$ și $(t, t+\Delta)$;*

b) *raritatea evenimentelor*

$$p_1(\Delta) = \omega\Delta + 0(\Delta),$$
$$p_m(\Delta) = 0(\Delta), \ m > 1$$
$$p_0(\Delta) = 1 - \omega\Delta + 0(\Delta).$$

Să se arate că procesul expus este un proces Poisson.

SOLUȚIE. Din egalitatea

$$E_n(t+\Delta) = \bigcup_r (E_r(\Delta) \cdot E_{n-r}(t)); \ r = 0, 1, \ldots, n$$

rezultă

$$p_n(t+\Delta) = \sum_{r=0}^{n} p_r(\Delta)\, p_{n-r}(t). \tag{1}$$

Să introducem funcția caracteristică

$$\varphi(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cdot e^{inu}.$$

Din relația (1) obținem

$$\varphi(t+\Delta; u) = \varphi(t, u) \cdot \varphi(\Delta t, u).$$

Ținînd seama de ipoteza b, avem

$$\varphi(\Delta, u) = p_0(\Delta) + p_1(\Delta) \cdot e^{iu} + 0(\Delta) = 1 + \omega\Delta(e^{iu} - 1) + 0(\Delta)$$

și deci

$$\frac{\varphi(t+\Delta, u) - \varphi(t, u)}{\Delta} = \omega(e^{iu} - 1)\varphi(t, u) + \frac{0(\Delta)}{\Delta}.$$

Făcînd pe $\Delta \to 0$, avem

$$\frac{\partial \varphi(t, u)}{\partial t} = \omega(e^{iu} - 1)\varphi(t, u)$$

a cărei integrală generală este de forma

$$\varphi(t, u) = C(u)\, e^{\omega t (e^{iu}-1)}.$$

Însă

$$\varphi(0, u) = 1$$

și deci

$$C(u) \equiv 1.$$

Rezultă că

$$\varphi(t, u) = e^{\omega t (e^{iu}-1)}$$

care este funcția caracteristică a unui proces Poisson de parametru ω.

26. *Să se calculeze coeficientul de corelație pentru un proces Poisson.*
SOLUȚIE. Fie ξ_t procesul Poisson considerat. Se știe că

$$M(\xi_t) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t) = \lambda t,$$

$$M_2(\xi_t) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(t) = \lambda^2 t^2 + \lambda t,$$

unde

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Rezultă că

$$D^2(\xi_t) = M_2(\xi_t) - [M(\xi_t)]^2 = \lambda^2 t^2 + \lambda t - \lambda^2 t^2 = \lambda t.$$

Să observăm acum că

$$M(\xi_t \xi_{t+s}) = M(\xi_t^2) + M[\xi_t(\xi_{t+s} - \xi_t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t + \lambda^2 ts.$$

Atunci coeficientul de corelație este

$$R(\xi_t, \xi_{t+s}) = \frac{M(\xi_t \xi_{t+s}) - M(\xi_t) M(\xi_{t+s})}{D(\xi_t) D(\xi_{t+s})}.$$

Ținînd seama de valorile calculate mai înainte obținem

$$R(\xi_t, \xi_{t+s}) = \frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda^2 t (t+s)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s}{t}}}.$$

27. *Să se arate că dacă* (ξ_t) *și* (η_t) *sînt două procese Poisson independente cu parametrii* λ *respectiv* μ, *atunci* $(\xi_t + \eta_t)$ *este de asemenea un proces Poisson de parametru* $\lambda + \mu$.

SOLUȚIE. Procesul $(\xi_t + \eta_t)$ este în general un proces Markov aditiv. Să notăm $\beta_t = \xi_t + \eta_t$. Atunci

$$P(\beta_{u+t} - \beta_u = n) = \sum_{j=0}^{n} P(\xi_{u+t} - \xi_u = j) \cdot P(\eta_{u+t} - \eta_u = n - j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-j}}{(n-j)!} = e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!},$$

unde rezultă că (β_t) este un proces Poisson.

28. *Fie* (ξ_t) *un proces Poisson omogen cu parametrul* λ. *Să notăm cu* (τ_n) *șirul momentelor de producere a evenimentelor aleatoare. Să se arate că*

$$\tau_{n+1} - \tau_n;\ n = 0, 1, \ldots, \tau_0 = 0$$

sînt variabile aleatoare independente și au funcția de repartiție

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0.$$

SOLUȚIE. Cum (ξ_t) este un proces aditiv, variabilele $\tau_{n+1} - \tau_n$, $n = 0, 1, \ldots$ sînt variabile aleatoare independente. Rezultă că

$$P(\tau_{n+1} - \tau_n \leqslant x \mid \tau_n = y) = P(\xi_{y+x} - \xi_y > 0) =$$
$$= 1 - P_0(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0$$

întrucît

$$P_0(x) = e^{-\lambda x}.$$

Deci

$$P(\tau_{n+1} - \tau_n \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

29. *Să considerăm un sistem aleator, care la momentul t se găseşte în starea $E_x(x = 0, 1, \ldots)$. Să presupunem că probabilitatea de trecere în intervalul Δt de la starea E_x la starea E_{x+1} este $\lambda x\,\Delta t + 0(\Delta t)$; probabilitatea ca să trec din starea E_x într-o stare diferită de E_{x+1} este $0(\Delta t)$; probabilitatea ca să nu se producă nici o modificare de stare este $1 - \lambda x\,\Delta t + 0(\Delta t)$.*

Să se determine probabilitatea $P_x(t)$ ca la momentul t sistemul să se găsească în starea $E_x(x = 0, 1, \ldots)$.

SOLUŢIE. Să determinăm probabilitatea $P_x(t + \Delta t)$. Aceasta este dată de

$$P_x(t + \Delta t) = (1 - \lambda x \cdot \Delta t)\, P_x(t) + \lambda(x - 1)\, P_{x-1}(t)\,\Delta t + 0(\Delta t)$$

după cum se verifică cu uşurinţă.

Trecînd pe $P_x(t)$ în membrul întîi, împărţind cu Δt şi trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0$, obţinem

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = -\lambda x P_x(t) + \lambda(x-1) \cdot P_{x-1}(t);\quad x = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Să observăm că pentru $x = 1$, avem

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t)$$

de unde rezultă că

$$P_1(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Se verifică imediat că $C = 1$, deci

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}.$$

Pentru integrarea ecuaţiei (1) să notăm

$$L_x(t) = P_x(t)\, e^{\lambda t x}$$

de unde rezultă că

$$P_x(t) = L_x(t) e^{-\lambda t x}.$$

Avem

$$P'_x(t) = L'_x(t)\, e^{-\lambda t x} - \lambda x L_x(t)\, e^{-\lambda t x}$$

sau înlocuind în (1), avem

$$L'_x(t)\, e^{-\lambda t x} - \lambda x L_x(t)\, e^{-\lambda t x} = -\lambda x L_x(t)\, e^{-\lambda t x} + \lambda(x-1)\, L_{x-1}(t)\, e^{-\lambda t(x-1)}$$

sau

$$L'_x(t) = \lambda(x-1) \cdot L_{x-1}(t) \cdot e^{-\lambda t x} \cdot e^{\lambda t} e^{\lambda t x}$$

de unde rezultă că

$$L'_x(t) = \lambda(x-1)\, e^{\lambda t} \cdot L_{x-1}(t).$$

Însă

$$L_1(t) = P_1(t)\, e^{\lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$$

și deci

$$L_2(t) = \lambda \int_0^t e^{\lambda \tau} P_1(\tau)\, d\tau = \lambda \int_0^t e^{\lambda \tau}\, d\tau = \lambda (e^{\lambda t} - 1)$$

$$L_3(t) = 2\lambda \int_0^t e^{\lambda \tau} P_2(\tau)\, d\tau = 2\lambda \int_0^t e^{\lambda \tau} (e^{\lambda \tau} - 1)\, d\tau =$$

$$= 2\lambda \int_0^t (e^{2\lambda \tau} - e^{\lambda \tau})\, d\tau = 2\lambda \left[\frac{1}{2\lambda} (e^{2\lambda t} - 1) - \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right] =$$

$$= e^{2\lambda t} - 1 - 2e^{\lambda t} + 2 = e^{2\lambda t} - 2e^{\lambda t} + 1$$

sau

$$L_3(t) = (e^{\lambda t} - 1)^2.$$

În general avem

$$L_x(t) = (e^{\lambda t} - 1)^{x-1}$$

și deci

$$P_x(t) = (e^{\lambda t} - 1)^{x-1} e^{-\lambda x} = \frac{[(e^{\lambda t} - 1)\, e^{-\lambda t}]^x}{e^{\lambda t} - 1} = \frac{(1 - e^{-\lambda t})^x}{e^{\lambda t} - 1}$$

sau

$$P_x(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{x-1} & \text{dacă } x = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să arătăm că $P_x(t)$ sînt probabilități. Pentru aceasta să arătăm că

$$\sum_{x=0}^{\infty} P_x(t) = 1.$$

Avem

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{x-1} = e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda t})^{x-1} = e^{-\lambda t} \frac{1}{1 - 1 + e^{-\lambda t}} = 1.$$

Procesul aleator definit mai înainte este întîlnit și sub numele de proces linear simplu de naștere.

30. *Pentru procesul aleator* (ξ_t) *de mai înainte să se calculeze valoarea medie, momentul de ordinul al doilea și dispersia.*

SOLUȚIE. Avem

$$M(\xi_t) = \sum_{x=1}^{\infty} x P_x(t) = e^{-\lambda t} \sum_{x=1}^{\infty} x (1 - e^{-\lambda t})^{x-1}.$$

Notînd

$$1 - e^{-\lambda t} = z,$$

obținem

$$M(\xi_t) = e^{-\lambda t} \sum_{x=1}^{\infty} xz^{x-1} = e^{-\lambda t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\sum_{x=0}^{\infty} z^x \right) = e^{-\lambda t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{1}{1-z} \right).$$

Rezultă că

$$M(\xi_t) = e^{\lambda t}.$$

Pentru momentul de ordinul al doilea, avem

$$M_2(\xi_t) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P_x(t) = e^{-\lambda t} \sum_{x=1}^{\infty} x^2 z^{x-1},$$

utilizînd notația

$$1 - e^{\lambda t} = z.$$

Însă

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot z^{x-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots)$$

Notînd

$$S_1 = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = z(1 + 2z + 3z^2 + \ldots)$$

$$= z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z + z^2 + z^3 + \ldots) = z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{z}{1-z} \right)$$

după unele calcule obținem

$$M_2(\xi_t) = e^{-\lambda t} \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

sau

$$M_2(\xi_t) = e^{2\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})$$

iar

$$D^2(\xi_t) = M_2(\xi_t) - [M(\xi_t)]^2 = e^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1).$$

31. *Să se studieze următorul proces aleator:*

1) *dacă la momentul t sistemul se află în starea $x (x = 1, 2, \ldots)$ atunci probabilitatea de trecere în starea $x + 1$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ este*

$$\lambda_x \Delta t + 0(\Delta t);$$

2) *dacă la momentul t sistemul se află în starea x, atunci probabilitatea de trecere în starea $x - 1$, în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ este*

$$\mu_x \Delta t + 0(\Delta t);$$

3) *probabilitatea de trecere într-o stare* $x-1$ *sau* $x+1$ *cu* $x>1$ *este* $0(\Delta t)$.

4) *probabilitatea ca în intervalul de timp* $(t, t+\Delta t)$ *să nu se producă nici o schimbare de stare este*

$$1-(\lambda_x+\mu_x)\Delta t+0(\Delta t).$$

SOLUȚIE. Ecuația diferențială care caracterizează acest proces (numit și proces de naștere și moarte) se obține cu ușurință. Avem

$$P_x(t+\Delta t)=\lambda_{x-1}P_{x-1}(t)\Delta t+[1-(\lambda_x+\mu_x)\Delta t]P_x(t)+$$
$$+\mu_{x+1}P_{x+1}(t)\Delta t+0(\Delta t).$$

Trecînd în membrul întîi pe $P_x(t)$, împărțind cu Δt și făcînd pe $\Delta t\to 0$, obținem

$$P'_x(t)=\lambda_{x-1}P_{x-1}(t)-(\lambda_x+\mu_x)P_x(t)+\mu_{x+1}P_{x+1}(t);\quad x=1,2,\ldots$$

Pentru $x=0$, avem

$$P'_0(t)=\mu_1 P_1(t).$$

Deci

$$\lambda_{-1}=\lambda_0=\mu_0=0.$$

Pentru $t=0$, și $x=x_0$ condițiile inițiale sînt

$$P_x(0)=\delta_x^{x_0}=\begin{cases}1 & \text{pentru } x=x_0\\ 0 & \text{pentru } x\neq x_0.\end{cases}$$

Se observă că λ_x și μ_x sînt funcții de x. Ecuațiile de mai înainte permit să se calculeze $P_x(t)$.

32. *Să se studieze procesul de mai înainte în cazul în care*

$$\lambda_x=\lambda x \text{ și } \mu_x=\mu x$$

unde $\lambda>0$ *și* $\mu>0$.

SOLUȚIE. În acest caz sistemul de ecuații devine

$$\begin{cases}P'_x(t)=\lambda(x-1)\cdot P_{x-1}(t)-(\lambda x+\mu x)\cdot P_x(t)+\mu(x+1)P_{x+1}(t),\\ P'_0(t)=\mu P_1(t).\end{cases}$$

Să introducem funcția generatoare

$$G(s,t)=\sum_{x=0}^{\infty}P_x(t)\cdot s^x.$$

Atunci obținem

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}=[\lambda s^2-(\lambda+\mu)s+\mu]\cdot\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}.$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$G(s, t) = f\left(\frac{\mu - \lambda s}{1 - s} \cdot e^{-(\lambda-\mu)t}\right)$$

unde $f(\cdot)$ este o funcție arbitrară. Cum $x(0) = x_0 = 1$, atunci $G(s, 0) = s$ și astfel

$$s = f\left(\frac{\mu - \lambda s}{1 - s}\right)$$

și de aici rezultă că

$$f(\xi) = \frac{\mu - \xi}{\lambda - \xi}.$$

Prin urmare

$$G(s, t) = \frac{\mu(1 - e^{(\lambda-\mu)t}) - (\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t}) \cdot s}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda(1 - e^{(\lambda-\mu)t}) \cdot s}.$$

Dezvoltînd în serie după puterile lui s, obținem

$$\begin{cases} P_x(t) = [1 - \alpha(t)] \cdot [1 - \beta(t)]\,[\beta(t)]^{x-1}, \text{ cu } x = 1, 2, \ldots \\ P_0(t) = \alpha(t) \end{cases}$$

unde

$$\alpha(t) = \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu},$$

$$\beta(t) = \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - \mu)}.$$

Din expresia funcției generatoare se obține cu ușurință valoarea medie și dispersia. Avem

$$M = e^{(\lambda-\mu)t},$$

$$D^2 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \cdot e^{(\lambda-\mu)t} \cdot (e^{(\lambda-\mu)t} - 1).$$

Să observăm că

$$\lim_{t\to\infty} M = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \lambda < \mu, \\ 1 & \text{dacă } \lambda = \mu, \\ \infty & \text{dacă } \lambda > \mu. \end{cases}$$

În cazul în care

$$\lambda = \mu$$

rezultă că

$$M = 1,$$

$$D^2 = 2\lambda t.$$

Se observă că

$$P_0(t) = \frac{\mu e^{(\lambda-\mu)t} - 1}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu},$$

iar

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \lambda < \mu, \\ \frac{\mu}{\lambda} \text{ dacă } \lambda > \mu. \end{cases}$$

33. *Într-un sistem fizic, în cursul timpului, se produc schimbări instantanee de aceeași natură, la momente aleatoare.*

Fie $p_n(t)$ probabilitatea ca în intervalul de timp de lungime t să se producă n schimbări. Se presupune că oricare ar fi numărul de schimbări care s-a produs în intervalul de timp $(0, t)$, probabilitatea unei schimbări în intervalul de timp $(t, t + h)$ este $\lambda h + 0(h)$, probabilitatea ca să se producă mai mult de o schimbare în acest interval de timp este $0(h)$.

Se cere să se determine probabilitatea $p_n(t)$.

SOLUȚIE. Considerăm intervalul de timp $(0, t + h)$. Fie $n \geqslant 1$. Avem

$$p_n(t + h) = p_n(t) \cdot (1 - \lambda h) + p_{n-1}(t) \cdot \lambda \cdot h + 0(h),$$

de unde

$$\frac{p_n(t + h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{0(h)}{h}.$$

Termenul $0(h)$ fiind independent de t, rămîne neschimbat dacă se schimbă t în $t - h$; aceasta implică, că atunci cînd h tinde către zero, termenul din stînga tinde către o limită; $p_n(t)$ este deci derivabilă și satisface ecuația diferențială

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t). \tag{1}$$

De asemenea, pentru $n = 0$, avem

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t),$$

de unde

$$\frac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda; \ \ln p_0(t) = -\lambda t + \ln c, p_0(t) = ce^{-\lambda t}$$

și ținînd seama că $p_0(0) = 1$, obținem $c = 1$.

Deci

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Pentru $n = 1$, obținem

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t),$$

sau

$$p_1(t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}.$$

Se observă că $p_0(t)$ și $p_1(t)$ corespund unei distribuții Poisson de parametru λt.

Presupunînd că

$$p_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

relația (1) dă

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Deci $p_n(t)$ urmează o lege Poisson de parametru λt.

34. *Fie* $\{\xi_1(t),\ t \geqslant 0\}$, $\{\xi_2(t),\ t \geqslant 0\}$ *două procese Poisson independente de parametru* λ_1 *și respectiv* λ_2

Fie

$$\xi(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t),\quad t \geqslant 0.$$

Se cere:

a) $\xi(t)$ *este un proces cu creștere independente?*

b) $\xi(t)$ *este un proces Poisson?*

c) $P\{\xi(t) - \xi(s) = k\}$ *pentru* $0 \leqslant s < t$ *și* $k = 0, \pm 1, \pm 2$;

d) $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\xi(t) > c\}$ *pentru un număr* c *real pozitiv.*

SOLUȚIE. a) Din definirea procesului $\xi(t)$ rezultă

$$\xi(t+s) - \xi(s) = [\xi_1(t+s) - \xi_2(t+s)] - [\xi_1(s) - \xi_2(s)] =$$
$$= [\xi_1(t+s) - \xi_1(s)] - [\xi_2(t+s) - \xi_2(s)],$$
$$\xi(s) - \xi(0) = [\xi_1(s) - \xi_2(s)] - [\xi_1(0) - \xi_2(0)] =$$
$$= [\xi_1(s) - \xi_1(0)] - [\xi_2(s) - \xi_2(0)].$$

Cele patru variabile care intervin sînt independente. Urmează că $\xi(t+s) - \xi(s)$ și $\xi(s) - \xi(0)$ sînt independente. Deci procesul este cu creșteri independente.

b) Deoarece $\xi(t)$ ia toate valorile întregi, pozitive, negative sau nule, nu poate fi un proces Poisson.

c) Avem

$$P[\xi(t) - \xi(s) = k] = P\{[\xi_1(t) - \xi_1(s)] - [\xi_2(t) - \xi_2(s)] = k\} =$$
$$= \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} P[\xi_1(t) - \xi_1(s) = \nu] \cdot P[\xi_2(t) - \xi_2(s) = \nu - k].$$

Ținînd seama că procesele $\xi_1(t)$ și $\xi_2(t)$ sînt staționare, obținem

$$P[\xi_1(t) - \xi_1(s) = k] = P[\xi_1(t-s) - \xi_1(0) = k] = P[\xi_1(t-s) = k],$$
$$P[\xi_2(t) - \xi_2(s) = k] = P[\xi_2(t-s) = k].$$

Punînd $t - s = u$, rezultă

$$\sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} P[\xi_1(u) = \nu] \cdot P[\xi_2(u) = \nu - k] = P[\xi(u) = k]$$

$\xi(t)$ este deci un proces staționar și

$$P(\xi(u) = k) = \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} e^{-\lambda_1 u} \frac{(\lambda_1 u)^\nu}{\nu!} \cdot e^{-\lambda_2 u} \frac{(\lambda_2 u)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u} \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} \frac{(\lambda_1 u)^\nu (\lambda_2 u)^{\nu-k}}{\nu!\,(\nu-k)!},$$

de unde

$$P[\xi(t) - \xi(s)] = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)} \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} \frac{(\lambda_1(t-s))^\nu \cdot (\lambda_2(t-s))^{\nu-k}}{\nu!\,(\nu-k)!},$$

d) $P[\xi(t) = k] = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^\nu (\lambda_2 t)^{\nu-k}}{\nu!\,(\nu-k)!} \leqslant \sup e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^\nu}{\nu!}.$

Deoarece

$$\frac{e^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{(\lambda_1 t)^\nu}{\nu!}}{e^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{(\lambda_1 t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}} = \frac{\lambda_1 t}{\nu},$$

maximul este atins pentru ν apropiat de $\lambda_1 t$, fie pentru un ν_0 astfel ca

$$\lambda_1 t = \nu_0 + \theta, \quad |\theta| < 1.$$

Aplicînd formula lui Stirling, obținem

$$\sup_\nu e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^\nu}{\nu!} = e^{-(\nu_0+\theta)} \frac{(\nu_0+\theta)^{\nu_0}}{\nu_0^{\nu_0} e^{-\nu_0} \sqrt{2\pi\nu_0}\,(1+\varepsilon_{\nu_0})} =$$

$$= e^{-\theta} \left(1 + \frac{\theta}{\nu_0}\right)^{\nu_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu_0}\,(1+\varepsilon_{\nu_0})}.$$

Cînd t tinde la infinit, ν_0 tinde la infinit, și $\sup_\nu e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^\nu}{\nu!}$ tinde la zero ca $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$.

Deoarece

$$P[|\xi(t)| < c] = \sum_{k=-[c]}^{[c]} P[\xi(t) = k],$$

atunci

$$\lim_{t\to\infty} P[|\xi(t)| < c] = 0.$$

Se mai poate utiliza funcția caracteristică,

$$\varphi_{\xi_1(t)-\xi_2(t)}(u) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(\cos u-1)}\, e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t\sin u}.$$

Cînd $t\to\infty$

$$\varphi_{\xi_1(t)-\xi_2(t)}(u) \to \psi(u)$$

cu

$$\psi(u) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } u = 2k\pi, \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$$

de unde

$$\lim_{t\to\infty} P[|\xi(t)| < c] = 0.$$

35. a) *Fie $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ un șir infinit de variabile aleatoare mutual independente, pozitive și de aceeași lege definită de densitatea*

$$\lambda e^{-\lambda u},\ \lambda > 0.$$

Să se verifice că legea variabilei

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

este dată de o densitate egală cu $k_n \cdot e^{-\lambda u} \cdot u^{n-1}$ și să se determine valoarea coeficientului k_n.

Se interpretează $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ ca timpi succesivi de realizare ai unui eveniment E în decursul unui proces aleator.

b) *Se notează cu $K(t)$ variabila aleatoare egală cu numărul de timpi T din șirul infinit $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ inferiori sau egali cu numărul t fix dat ($t \geqslant 0$).*

Cu ajutorul probabilității $P(T_{k+1} > t \mid T_k = u)$, ($u \leqslant t$) să se calculeze

$$P\{K(t) = k\}$$

și să se arate că $K(t)$ urmează o lege Poisson de parametru λt.

c) *În același mod, considerînd evenimentul*

$$T_{k+1} > t + \theta \mid T_k = u$$

și notînd prin T momentul la care se produce primul eveniment următor lui t ($T > t$), să se arate că probabilitatea

$$P(T > t + \theta)$$

nu depinde de rangul k al ultimului eveniment (ce se produce la timpul $T_k < t$) și că $T - t$ urmează aceeași lege ca și U.

d) *Să se arate că variabila aleatoare $K(t_0 + t) - K(t_0)$, (t_0 și t dați) nu depinde de $K(t_0)$.*

Să se calculeze probabilitatea ca în intervalul de timp $(t_0, t_0 + t]$ să avem k evenimente și să se arate că legea variabilei $K(t_0 + t) - K(t_0)$ este aceeași cu a variabilei $K(t)$.

Să se extindă metoda folosită la punctul (c) pentru a se arăta ca $K(t_0+t) - K(t_0)$ *nu depinde de cunoașterea lui* $K(t_1)$ *pentru timpii* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *dați* $\leqslant t_0$.

e) *Arătați că* $P(T_n \leqslant A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *Oricare ar fi* A *dat să se arate că*:

1) $P(T_n \leqslant A$, *pentru toți* $n) = 0$;

2) *Cu probabilitatea 1, șirul* T_n *crește indefinit*;

f) *Ce convergențe se pot obține pentru șirul de variabile*;

$$\frac{T_n - A_n}{B_n}.$$

SOLUȚIE. a) A se vedea problema 49 cap. V.

b) Din definiția lui $K(t)$ rezultă

$$P\{K(t) = k\} = P\{T_{k+1} > t,\ T_k \leqslant t\} =$$

$$= P\{T_k \leqslant t\} \cdot P\{T_{k+1} > t \mid T_k \leqslant t\} =$$

$$= \int_0^t P\{T_k = u\} \cdot P\{T_{k+1} > t \mid T_k = u\}\, du.$$

Avem

$$P\{T_{k+1} > t \mid T_k = u\} = P\{U_{k+1} > t - u\} = e^{-\lambda(t-u)}$$

$$P\{T_k = u\} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda u} \cdot u^{k-1},$$

de unde

$$P\{K(t) = k\} = \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot e^{\lambda u} \cdot u^{k-1} e^{-\lambda(t-u)}\, du,$$

$$P\{K(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Deci $K(t)$ urmează o lege Poisson de parametru (λt).

c) Avem

$$P(T > t + \theta) = \sum_k P\{T_{k+1} > t + \theta,\ T_k < t\}$$

și

$$P\{T_{k+1} > t + \theta \mid T_k < t\} = \int_0^t P\{T_k = u\} P\{U_{k+1} > t + \theta - u\} du =$$

$$= e^{-\lambda(t+\theta)} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

de unde

$$P(T > t + \theta) = e^{-\lambda\theta},$$

$$P(T - t < \theta) = 1 - e^{-\lambda\theta},$$

deci s-a regăsit repartiția variabilei U.

Pe de altă parte

$$P\{T > t + \theta \mid K(t) = k\} = \frac{P\{T > t + \theta, K(t) = k\}}{P(K(t) = k)}$$

și

$$P\{T > t + \theta, K(t) = k\} = P\{T > t + \theta, T_k < t\}.$$

Urmează că

$$P\{T > t + \theta \mid K(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}}$$

$$P\{T > t + \theta \mid K(t) = k\} = e^{-\lambda\theta}$$

independentă de k.

d) Fie τ_0 momentul la care se produce primul eveniment următor lui t_0 și fie A_0 acest eveniment

$$A_0 = \{(K(t_0) = n - 1)\} \cap \{\tau_0 = t + \theta\} \cap \{T_{n+k} < t_0 + t\} \cap \{T_{n+k+1} > t_0 + t\}$$

care se mai poate scrie

$$A_0 = \{\{K(t_0) = n - 1\} \cap \{\tau_0 = t_0 + \theta\} \cap \{U_{n+1} + \cdots + U_{n+k} < t - \theta\} \cap \{U_{n+1} + \cdots + U_{n+k+1} > t - \theta\}\}.$$

În ultimele două evenimente din expresia lui A_0 nu intervin decît U_i $(i = n+1, \ldots, n+k+1)$ și în primele evenimente decît U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; aceste două perechi de evenimente sînt independente. Mai mult, am văzut la punctul c) că cele două evenimente $\{K(t_0) = n - 1\}$ și $\{\tau_0 = t_0 + \theta\}$ sînt independente. Avem

$$P(A_0) = P\{K(t_0) = n - 1\} \cdot P\{\tau_0 = t_0 + \theta\} \cdot P\{\{U_{n+1} + \cdots + U_{n+k} < t - \theta\} \cap \{U_{n+1} + \cdots + U_{n+k+1} > t - \theta\}\},$$

de unde

$$P(A_0) = e^{-\lambda t_0} \cdot \frac{(\lambda t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda \cdot e^{-\lambda\theta} \cdot e^{-\lambda(t-\theta)}\frac{\lambda^k (t-\theta)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda(t+t_0)} \cdot \frac{\lambda^{n+k} t_0^{n-1}}{(n-1)!\,k!} \cdot (t - \theta)^k.$$

Dar

$$P\{K(t_0 + t) - K(t_0) = k + 1 \mid K(t_0) = n - 1\} = \frac{\int_0^t P(A_0)\,d\theta}{e^{-\lambda t_0} \cdot \frac{(\lambda t_0)^{n-1}}{(n-1)!}},$$

de unde

$$P\{K(t_0+t)-K(t_0)=k+1 \mid K(t_0)=n-1\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Egalitatea de mai înainte ne arată că
— legea lui $K(t_0+t)-K(t_0)$ nu depinde de $K(t_0)$;
— $K(t_0+t)-K(t_0)$ urmează aceeași lege ca și $K(t_0)$.

Această formulă dă probabilitatea ca în intervalul de timp $(t_0, t_0+t]$ să se producă k evenimente.

Fie $t_1<t_0<t_0+t$. Considerăm evenimentul

$$A_{\theta_1,\theta_1}=\{\{K(t_1)=h-1\}\cap\{\tau_1=t_1+\theta_1\}\cap\{K(t_0)-K(t_1)=n-h\}\cap$$

$$\cap\{\tau_0=t_0+\theta_0\}\cap\{U_{n+1}+\cdots+U_k<t-\theta_0\}\cap\{U_{n+1}+\cdots+U_{k+1}>t-\theta_0\}\},$$

unde τ_0 (respectiv τ_1) reprezintă primul moment la care se produce un eveniment după t_0 (respectiv t_1).

Avem

$$P\{A_{\theta_0,\theta_1}\}=P\{K(t_1)=h-1\}\cdot P\{\tau_1=t_1+\theta_1\}\cdot P\{K(t_0)-K(t_1)=n-h\}\cdot$$

$$\cdot P\{\tau_0=t_0+\theta_0\}\cdot P\{\{U_{n+1}+\cdots+U_k<t-\theta_0\}\cap\{U_{n+1}+\cdots+U_{k+1}>t-\theta_0\}\}$$

și

$$P\{K(t_0+t)=k \mid K(t_1)=h-1\}\cap\{K(t_0)=n-h\}=$$

$$=\frac{\int_{\theta_0}\int_{\theta_1}P(A_{\theta_0,\theta_1})\,d\theta_0 d\theta_1}{P\{\{K(t_1)=h-1\}\cap\{K(t_0)=n-h\}\}}=$$

$$=\frac{\int_{\theta_0}\int_{\theta_1}P(A_{\theta_0,\theta_1})\,d\theta_0 d\theta_1}{P\{K(t_1)=h-1\}\cdot P\{K(t_0)-K(t_1)=n-1\}}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

expresie independentă de $K(t_1)$.

Aceeași metodă ne permite să arătăm că $K(t_0+t)-K(t_0)$ este independentă de $K(t_i)$ pentru $t_1, \ldots, t_n\leqslant t_0$.

Un proces $K(t)$ având proprietatea de mai înainte este prin definiție un proces Poisson.

e) $$P\{T_n\leqslant A\}=\int_0^A\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot e^{-u}\cdot u^{n-1}\,du=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^A e^{-u}\cdot u^{n-1}\,du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^A u^{n-1}\,du=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot\frac{A^n}{n}=\frac{(\lambda A)^n}{n!}.$$

Deci

$$P\{T_n\leqslant A\}\to 0.$$

1. Avem

$$\sum_n P(T_n \leqslant A) \leqslant \sum_n \frac{(\lambda A)^n}{n!} < \infty$$

deoarece

$P(T_n \leqslant A$, pentru toți $n) \leqslant P\{T_n \leqslant A$, pentru o infinitate de $n\}$.

După teorema lui Borel-Cantelli, ultimul termen este nul.

$$P\{T_n \leqslant A \text{ pentru toți } n\} = 0.$$

2. Deoarece

$$P\{T_n \leqslant A \text{ pentru toți } n\} = 0.$$

urmează că

$$P\{T_n < A \text{ pentru un } n\} = 1, \text{ pentru toți } A.$$

Deci

$$P\{\lim \cdot \inf \cdot T_n = \infty\} = 1$$

și deoarece șirul T_n este crescător

$$P\{\lim T_n = \infty\} = 1.$$

f) Se obține că

$$M(U_k) = \frac{1}{\lambda},$$

$$D^2(U_k) = \frac{1}{\lambda^2},$$

U_k fiind independente, avem

$$\frac{1}{n}\left(T_n - \frac{n}{\lambda}\right) \xrightarrow{a.s.} 0,$$

$$\frac{T_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} \xrightarrow{B} N(0, 1).$$

36. *Formula lui Erlang. Presupunem că o centrală telefonică primește apeluri la momentele* $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ *Presupunem că intervalele de timp* $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sînt variabile aleatoare independente, pozitive și că au aceeași funcție de distribuție* $F(x)$. *Presupunem că există* m *canale libere. Dacă există un canal liber cînd sosește o chemare, atunci se realizează o legătură; dacă canalul este ocupat, chemarea este pierdută. Presupunem că timpurile de păstrare sînt variabile aleatoare pozitive, independente unele de altele și de momentele* $\{\tau_n\}$ *și au aceeași funcție de distribuție*

$$H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Fie ξ_n *variabila aleatoare ce dă numărul de canale ocupate la momentul* $t = \tau_n - 0$. *În acest caz* ξ_n *poate lua valorile* 0, 1,..., m *și stările posibile ale sistemului sînt* $E_0, E_1, \ldots, E_m$.

Se cere: *să se determine probabilitatea limită* $\{P_j\}$;

SOLUȚIE. Avem probabilitățile de trecere

$$p_{jk} = C_{j+1}^{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{j+1-k} \, dF(x)$$

dacă $j = 0, 1, \ldots, m-1$ și

$$p_{m,k} = p_{m-1,k}.$$

În această problemă lanțul Markov este ireductibil, neperiodic și ergodic dacă numărul de stări este finit. Probabilitățile limită $P_j (j=0, 1, \ldots, m)$ satisfac următorul sistem de ecuații liniare

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{m} p_{jk} P_j \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

și

$$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1.$$

Pentru a rezolva acest sistem de ecuații se introduce funcția generatoare

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k.$$

Pentru $U(z)$ obținem următoarea relație

$$U(z) = \int_0^\infty (1 - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x}) \cdot U(1 - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x}) \, dF(x) +$$

$$+ (1 - z) P_m \int_0^\infty e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x})^m \, dF(x).$$

Fie acum

$$U_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1}$$

și

$$\Phi_r = \int_0^\infty e^{-r\mu x} \, dF(x) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

Diferențiind ecuația lui $U(z)$ de r ori și punînd $z = 1$ obținem

$$U_r = \frac{\Phi_r}{1 - \Phi_r} \cdot [U_{r-1} - C_m^{r-1} U_m] \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

unde $U_m = P_m$. Mai departe $U_0 = 1$. Dacă U_m este considerat fix, formula de mai înainte dă o formulă de recurență pentru U, a cărei soluție este

$$U_r = c_r\left[1 - U_m \sum_{j=0}^{r-1} C_m^j \frac{1}{c_j}\right],$$

unde $c_0 = 1$ și

$$c_j = \prod_{r=1}^{j} \frac{\Phi_r}{1-\Phi_r}. \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Dacă în formula lui U_r punem $r = m$, obținem

$$U_m = 1 \Big/ \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{1}{c_j}$$

și astfel

$$U_r = c_r \sum_{j=r}^{m} C_m^j \frac{1}{c_j} \Big/ \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{1}{c_j}.$$

Deoarece

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k U(z)}{\mathrm{d}z^k}\right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} C_r^k \frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^r U(z)}{\mathrm{d}z^r}\right)_{z=1},$$

găsim

$$P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} C_r^k c_r \sum_{j=r}^{m} C_m^j \frac{1}{c_j} \Big/ \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{1}{c_j}, \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Dacă, în particular,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

atunci

$$\Phi_j = \frac{\lambda}{\lambda + j\mu} \text{ și } c_j = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!},$$

de unde

$$P_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \Big/ \sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

BIBLIOGRAFIE

1. Bachelier L., *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris 1912.
2. Boev, G. P., *Teoria veroiatnostei*, Moskva, 1950.
3. Borel E., *Traité du Calcul des Probabilités et ses applications.*
4. Ciucu G., *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
5. Ciucu G., Șimboan G., *Teoria probabilităților și statistica matematică*, Culegere de probleme, Editura Tehnică, București, 1962.
6. Ciucu G., Theodorescu R., *Procese cu legături complete*, Editura Acad. R.P.R., București,, 1960.
7. Ciung Kai-Lai, *Odnorodnie țepi Marhova*, Izdatelstvo „Mir", Moskva, 1964.
8. Cramer H., *Mathematical methods of Statistics*, Princeton University Press, 9e Ed., 1961.
9. Dacunha-Castelle D., Revuz D. et Schreiber M., *Recueil de Problèmes de Calcul des Probabilités*, Masson et Cie ed., 1965.
10. Dinculeanu N., *Teoria măsurii și funcții reale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1964.
11. Dugué D., *L'existence d'un norme est incompatible avec la convergence en probabilité*, C.R. Acad. Sci., Paris, V. 240, 1955.
12. Feller W., *An intoduction to Probability Theory and its Applications*, Volume I, Second edition.
13. Fortet R., *Calcul des Probabilités*, Paris, Centre National de la Recherche scientifique, 1950.
14. Freeman H., *Introduction to statistical inference*, Reading, Palo Alto, London, „Addison-Wesley", 1963.
15. Gnedenko B. V., *Curs teorii veroiatnostei*, Gosud. Izdatelstvo Fizico-Matematicescoi literaturî, Moskva, 1961.
16. Guiașu S., *Câteva cercetări legate de teorema lui Auscombe asupra repartiției asimptotice a șirurilor de variabile aleatoare*, Studii și Cercetări Matematice, nr. 3, anul XIV, 1963.
17. Halmoș P. R., *Measure Theory*, Van Nostrand Cy, Ed. 1956.
18. Iaglom A. M., Iaglom I. M., *Probabilitate și informație*, Editura didactică și pedagogică, 1963 (Traducere din limba rusă).
19. Iaglom A. M., Iaglom I. M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Editura Tehnică, 1962, (Traducere din limba rusă).
20. Kendall M. G. and Stuart A., *The Advanced theory of Statistics*, vol. I, II, Ed. Charles Griffin, London, 1961.
21. Kendall G. M., *Exercises in Theoretical Statistics*, Charles Griffin & Company limited, London, 1956.
22. Lévy P., *Calcul des Probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1925.
23. Loève M., *Probability Theory*, Van Nostrand Cy, Ed. 1956.
24. *Mathematics Magazine*, Vol. 32—37, 1959—1963.
25. Meșalkin L. D., *Sbornic zadaci po teorii veroiatnostei*, Izdatelstvo Moskovskovo Universiteta, 1963.
26. Mihoc Gh., Urseanu V., *Matematici aplicate în statistică*, Editura Academiei R.P.R., București, 1962.

27. Neveu J., *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Paris, „Masson", 1964.
28. Nicolescu M., *Analiză Matematică*, vol. I, II, III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958, 1959, 1960.
29. Nicolescu M., *Funcţii reale şi elemente de analiză funcţională*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
30. Onicescu O., Mihoc Gh., *Lecţii de Statistică matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.
31. Onicescu O., *Teoria Probabilităţilor şi aplicaţii*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
32. Parzen E., *Modern Probability Theory and its Applications*, New-York, London, „John Wiley", 1960.
33. Parzen E., *Stochastic Processes*, San Francisco, „Holden-Day", 1962.
34. Rényi A., *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem anhang über informationstheorie*, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
35. Rozanov A., *Staţionarnîe sluciainîe proţessî*, Fizmatgiz, 1963.
36. Sîmboan G., *Curs de funcţii reale şi elemente de analiză funcţională*, Editura de Stat didactică şi pedagogică, Bucureşti 1962.
37. Scorohod A. V., *Sluciainîe proţessî s nezavisimîmi prirașeniami*, Moskva, 1964.
38. Stoka M., Theodorescu R., *Probabilitate şi geometrie*, Editura ştiinţifică, 1966.
39. Takács L., *Stochastic Processes, Problems and Solutions*, John Wiley, New-York, 1960.
40. *The American Mathematical Monthly*, vol. 63—71, 1956—1964.
41. Tortrat A., *Calcul des Probabilités*, Masson et C^ie, Ed. 1963.
42. Vasilache S., *Elemente de teoria mulţimilor şi a structurilor algebrice*, Editura Academiei R.P.R., 1956.
43. Venţeli E. S., *Teoria veroiatnostei* — Gosudarstvennoe uzdatelstvo Fizico-Matematicescoi literaturî, Moskva, 1958.
44. Wilks S., *Mathematical Statistics*, John Wiley, New-York, 1962.

Redactor responsabil : LINA TICOŞ
Tehnoredactor GRIGORE LECA

Dat la cules 05.09.1966. Bun de tipar 12.01.1967. Apărut 1967. Tiraj : 4.500+140+30. Legate. Hîrtie velină de 63 g/m², 700×1000/16. Coli editoriale 29,68. Coli de tipar 31. A 13.967/1966. C.Z. pentru bibliotecile mari 519.2(021). C.Z. pentru bibliotecile mici 519.

Tiparul executat la Întreprinderea Poligrafică „Informația", str. Brezoianu nr. 23—25, București
Republica Socialistă România